

Interrogation écrite n° 1

Correction

Exercice 1.

1. Toute fonction de X dans Y est une partie de $X \times Y$. On considère donc $A = \mathcal{P}(X \times Y)$, et les deux propositions suivantes :

$$P(f) = \ll \forall x \ x \in X \Rightarrow \exists y \ (x, y) \in f \gg$$

$$Q(f) = \ll \forall x \forall y \forall z \ ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow y = z \gg.$$

La proposition $P(f)$ exprime que chaque élément de X est en relation par f avec un élément de Y ; la proposition $Q(f)$ exprime que chaque élément est en relation par f avec au plus un élément. L'ensemble \mathcal{F} des fonctions de X dans Y est donc obtenu en appliquant l'axiome de compréhension

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid P(f) \wedge Q(f)\}.$$

2. Soit $x \in \bigcup A$. Alors, par définition de $\bigcup A$, il existe $y \in A$ tel que $x \in y$ et $y \in A$. Alors $y \in B$ puisque $A \subset B$, et donc $x \in \bigcup B$.

Exercice 2.

1. *Réflexivité* : avec $k = 1$ on voit que $a|a$. *Transitivité* : si $a|b$ et $b|c$ alors $c = kb$ et $b = k'a$ donc $c = kk'a$ ce qui montre bien que $a|c$. *Anti-symétrie* : si $a|b$ et $b|a$ alors $b = ka$ et $a = k'b$ donc $b = kk'b$. Deux cas : 1) si $b = 0$ alors $a = k'b = 0$ donc $a = b$; et 2) si $b \neq 0$ alors $kk' = 1$ donc $k = k' = 1$ et donc $a = b$.
2. 0 est l'élément maximum puisque $0 = 0a$ montrer que $a|0$ pour tout entier a .
3. Pour la borne inférieure : c'est un diviseur de a et b qui divise tout diviseur commun à a et à b ; la borne inférieure $a \wedge b$ est donc égale au pgcd de a et b . De même, $a \vee b$ est égal au ppcm de a et b .

Exercice 3. Supposons que X est un ensemble qui contient tous les singletons. Considérons $Y = \bigcup X$. On montre que tout ensemble x appartient à Y . En effet, si x est un ensemble quelconque, l'axiome de la paire appliqué à x et x permet de construire le singleton $y = \{x\}$, qui appartient donc à X . Comme $x \in y$, il s'ensuit que $x \in Y$. Or on sait d'après l'antinomie de Russel qu'il n'existe pas de tel ensemble Y qui contient tout ensemble parmi ses éléments.

Exercice 4.

1. Par définition du plus grand élément, $m \in A$ et m majore A . Si x est un majorant quelconque de A , alors en particulier x majore m puisque $m \in A$, c'est-à-dire $m \leq x$. Ceci montre que m est le plus petit des majorants de A , c'est-à-dire sa borne supérieure.
2. $\leq_Z = \leq_X \cap (Z \times Z)$.
3. (a) Puisque n est un élément de X qui majore A , et puisque m est le plus petit des éléments de X qui majorent A , il s'ensuit que $m \leq n$.
(b) Si $m \in Z$, alors m est un élément de Z qui majore A . Par définition de n comme borne supérieure de A dans Z , ceci entraîne que $n \leq m$. Comme on avait déjà $m \leq n$, on a bien $m = n$.
4. Aucune condition n'est suffisante. Prendre par exemple $X = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{Q}$ et $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Alors A a une borne supérieure dans X mais pas dans Z . Inversement, on pose $X = \mathbb{Q}$, $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ et $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2} \text{ ou } x \geq 2\}$. Alors A admet 2 comme borne supérieure dans Z mais n'admet pas de borne supérieure dans X .