

Devoir n° 2
À rendre le 9 mars 2011

Exercice 1.

1. Soit X un ensemble. Montrer l'existence de l'ensemble des relations d'équivalence sur X .
2. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble qui contient comme éléments tous les ensembles de la forme $\mathcal{P}X$, où X est un ensemble quelconque.

Exercice 2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application croissante de (X, \leq) vers (Y, \leq) . On dit que f est *adjointe à gauche* de l'application croissante $g : Y \rightarrow X$ si

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad f(x) \leq y \iff x \leq g(y).$$

Dans ce cas, on dit que g est *adjointe à droite* de f .

1. Si f est une bijection croissante dont l'inverse est croissante, montrer que f admet une adjointe à droite.
2. Montrer que l'adjointe à gauche, si elle existe, est unique.
3. Montrer que les adjonctions se composent, c'est-à-dire, si $f : X \rightarrow Y$ est adjointe à gauche de $f' : Y \rightarrow X$, et si $g : Y \rightarrow Z$ est adjointe à gauche de $g' : Z \rightarrow Y$, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est adjointe à gauche de $f' \circ g' : Z \rightarrow X$.

Exercice 3 (suite de l'exercice précédent). Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On note $f^{-1} : \mathcal{P}Y \rightarrow \mathcal{P}X$ l'application définie par

$$\forall B \subset Y \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Déterminer les adjointes à gauche et à droite, si elles existent, de l'application f^{-1} ainsi définie ($\mathcal{P}X$ et $\mathcal{P}Y$ sont ordonnés par inclusion).

Exercice 4.

1. Soit X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une fonction $f : X \rightarrow Y$ injective. Montrer l'existence d'une fonction $g : Y \rightarrow X$ surjective.
2. Soit X un ensemble. On suppose l'existence d'une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ surjective. Montrer l'existence d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ injective. Peut-on encore conclure si on remplace \mathbb{N} par un ensemble Y quelconque? Quelle propriété de \mathbb{N} proposez-vous de transposer sur Y pour pouvoir conclure de la même façon?