

Devoir n° 3  
À rendre le 30 mars 2011

**Rappel :** Si  $(X, \leq)$  et  $(Y, \leq)$  sont deux ensembles partiellement ordonnés, on dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : X \rightarrow Y$  croissante et dont la bijection réciproque est croissante.

### Problème

On considère un ensemble partiellement ordonné  $(X, \leq)$  qui est *dénombrable*, et dont l'ordre partiel est *total*. On considère une énumération  $(x_0, x_1, \dots)$  de  $X$ .

1. *Préliminaires sur les ordres totaux.* (a) Rappeler la définition d'un ordre total. (b) Montrer que si  $h : X \rightarrow Y$  est une bijection croissante entre deux ordres partiels, et si  $(X, \leq)$  est un ordre total, alors la bijection réciproque de  $h$  est croissante. (c) Montrer que si  $(X, \leq)$  est un ordre total, alors toute fonction  $f : X \rightarrow Y$  strictement croissante est injective.
2. Soit  $y_0, y_1, \dots$  une énumération de  $\mathbb{Q}$ . On considère la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$  construite ainsi :  $f(x_0) = y_0$ , et si  $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$  ont déjà été construits, avec  $n \geq 1$ , alors les points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  partagent  $X$  en  $n + 1$  intervalles dont deux sont de la forme  $A_u = \{x \in X \mid x < u\}$  pour  $u \in X$  et  $B_v = \{x \in X \mid x > v\}$  pour  $v \in X$ , et  $n - 1$  sont de la forme

$$C_{u,v} = \{x \in X \mid u < x < v\} \quad \text{pour } u, v \in X \text{ avec } u < v.$$

L'élément  $x_n \in X$  se situe dans l'un de ces intervalles, disons  $C$  avec  $C = C_{x_i, x_j}$  ou  $C = A_{x_i}$  ou  $C = B_{x_i}$ . On pose  $f(x_n) = y_k$ , où  $k$  est le plus petit indice tel que

$$\begin{cases} y_k \in ]f(x_i), f(x_j)[, & \text{si } C = C_{x_i, x_j} \\ y_k \in ]-\infty, f(x_i)[, & \text{si } C = A_{x_i}, \\ y_k \in ]f(x_i), +\infty[, & \text{si } C = B_{x_i}. \end{cases}$$

- (a) Justifier la construction précédente définissant la fonction  $f$ . En particulier, justifier la partition de  $X$  en  $n + 1$  intervalles au rang  $n$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est strictement croissante. *Indication :* montrer que pour chaque entier naturel  $n$ , la restriction de  $f$  à  $\{x_0, \dots, x_n\}$  est strictement croissante; puis conclure.
  - (c) Montrer que  $f$  est injective. En déduire que tout ordre partiel dénombrable et total est isomorphe à une partie de  $\mathbb{Q}$ .
3. On suppose à présent que  $(X, \leq)$  possède les deux propriétés supplémentaires suivantes :
- $P_1$ .  $(X, \leq)$  est *dense*, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad x < y \Rightarrow \exists z \in X \quad x < z < y.$$

$P_2$ .  $(X, \leq)$  n'a ni plus petit ni plus grand élément.

L'objectif de cette question est de montrer que les deux conditions  $P_1$  et  $P_2$  ci-dessus entraînent que  $f$  est surjective.

- (a) Montrer que si  $z_1, z_2 \in f(X)$ , alors il existe une infinité d'éléments  $z \in f(X)$  tels que

$$z_1 < z < z_2.$$

- (b) Montrer que  $f(X)$  n'a ni majorant ni minorant dans  $\mathbb{Q}$ .
- (c) Montrer finalement que  $f$  est surjective. En déduire que tout ordre partiel dénombrable qui est total, dense, et sans plus grand ni plus petit élément, est isomorphe à  $\mathbb{Q}$ .

**Correction.**

1. Soit  $y_1, y_2 \in Y$  et  $x_1 = h^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = h^{-1}(y_2)$ . Si  $y_1 \leq y_2$  dans  $Y$ , alors  $x_1 > x_2$  est impossible donc  $x_1 \leq x_2$  puisque  $(X, \leq)$  est total. Donc  $h^{-1}$  est croissante.
2. (a) On montre par récurrence sur  $n \geq 0$  la propriété suivante : si  $x_0, \dots, x_n$  sont  $n$  éléments distincts de  $X$ , il existe une permutation  $\sigma : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  telle que

$$x_{\sigma(0)} < x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)},$$

et les  $n + 1$  intervalles

$$C_{x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}} \quad 0 \leq i < n, \quad A_{x_{\sigma(0)}}, \quad B_{x_{\sigma(n)}} \quad (1)$$

forment une partition de  $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . La propriété est évidente pour  $n = 1$ . Supposons-la acquise pour  $n \geq 1$ , et soit  $x_0, \dots, x_{n+1}$   $n + 2$  points distincts de  $X$ . Soit  $\sigma : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  la permutation donnée par l'hypothèse de récurrence. Alors  $x_{n+1}$  se situe dans l'un des intervalles de la partition. Supposons par exemple  $x_{n+1} \in C_{x_{\sigma(i_0)}, x_{\sigma(i_0+1)}}$ . Considérons la permutation  $\theta : \{0, \dots, n + 1\} \rightarrow \{0, \dots, n + 1\}$  donnée par

$$\theta(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \text{si } i < i_0, \\ n + 1, & \text{si } i = i_0, \\ \sigma(i - 1), & \text{si } i > i_0. \end{cases}$$

Il faut vérifier que les intervalles

$$C_{x_{\theta(i)}, x_{\theta(i+1)}} \quad 0 \leq i < n + 1, \quad A_{x_{\sigma(0)}}, \quad B_{x_{\sigma(n)}} \quad (2)$$

forment une partition de  $X \setminus \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ . D'une part, il est clair que les intervalles (2) ont des intersections deux à deux vides. D'autre part, si  $x \in X$  est un élément quelconque distinct de  $x_0, \dots, x_{n+1}$ , alors  $x$  appartient à l'un seulement des intervalles de (1) par hypothèse de récurrence. Si  $x \in C_{x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}}$  avec  $i \neq i_0$  ou si  $x \in A_{x_{\sigma(0)}}$  ou si  $x \in B_{x_{\sigma(n)}}$ , alors  $x$  appartient à l'un des intervalles correspondants de (2). Le seul cas restant est  $x \in C_{x_{\sigma(i_0)}, x_{\sigma(i_0+1)}}$ . Dans ce cas, puisque  $X$  est un ordre total, on a  $x_{\sigma(i_0)} < x < x_{n+1}$  ou  $x_{n+1} < x < x_{\sigma(i_0+1)}$ , ce qui correspond à

$$x \in C_{x_{\theta(i_0-1)}, x_{\theta(i_0)}} \quad \text{ou} \quad x \in C_{x_{\theta(i_0)}, x_{\theta(i_0+1)}}.$$

Le même raisonnement avec des ajustements s'applique si  $x_{n+1} \in A_{x_{\sigma(0)}}$  ou si  $x_{n+1} \in B_{x_{\sigma(n)}}$ . Cette propriété étant démontrée, la construction de  $f$  par récurrence est claire.

- (b) On montre par récurrence sur  $n$  que  $f$  restreinte à  $\{x_0, \dots, x_n\}$  est strictement croissante. La propriété est claire pour  $n = 0$ ; supposons-là vraie pour  $n \geq 0$ . Par hypothèse de récurrence on a bien

$$x_i < x_j \Rightarrow f(x_i) < f(x_j) \quad \text{si } i, j \leq n.$$

Soit par exemple  $i < n$  tel que  $x_i < x_{n+1}$ . Alors  $x_i$  est inférieur ou égal à la borne inférieure de l'intervalle de la partition de rang  $n$  qui contient  $x_{n+1}$ . Soit  $x_{i_0}$  cette borne inférieure. Par construction de  $f(x_{n+1})$  on a  $f(x_{i_0}) < f(x_{n+1})$ . Puisque  $x_i \leq x_{i_0}$  on a  $f(x_i) \leq f(x_{i_0})$  par hypothèse de récurrence, et donc  $f(x_i) < f(x_{n+1})$ . Le même raisonnement s'applique en changeant borne inférieure en borne supérieure dans le cas où  $x_{n+1} < x_i$ . La propriété est donc démontrée par récurrence.

Maintenant, pour montrer que  $f$  est strictement croissante : soit  $x, y \in X$  avec  $x < y$ . Il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $x, y \in \{x_0, \dots, x_n\}$ , puisque  $X$  est dénombrable. Alors grâce au résultat précédent, on a  $f(x) < f(y)$ .

- (c)  $f$  est donc injective d'après la question 1(c). Il s'ensuit que  $X$  est isomorphe à son image  $f(X) \subset \mathbb{Q}$ , puisque la bijection réciproque est automatiquement croissante d'après la question 1(b).

3. (a) Construire par récurrence une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments tels que  $z_1 < u < z_2$ . La construction aboutit grâce à la propriété de densité  $P1$  et parce que  $f$  est strictement croissante.
- (b) Supposons que  $f(X)$  est majorée. Alors aucun majorant  $y$  n'appartient à  $f(X)$ ; car cela contredirait que  $X$  n'a pas de plus grand élément. On considère  $y_k \in \mathbb{Q}$  un majorant de  $f(X)$ . Pour chaque entier  $n \geq 0$ , posons  $M_n = \max\{x_0, \dots, x_n\}$ ; ce maximum existe, car tout sous-ensemble fini d'un ensemble totalement ordonné possède un maximum. Considérons le plus petit entier  $m > k$  tel que  $x_m > M_k$ ; cet entier existe puisque  $X$  n'a pas de plus grand élément d'après la propriété  $P_2$ . Alors  $f(x_m) = y_h$  avec  $h$  minimal tel que  $y_h > f(M_m)$ . Mais  $h \geq m > k$ , et  $y_k > f(x_m)$  ce qui contredit la définition de  $h$ .  
On fait un raisonnement analogue pour montrer que  $f(X)$  n'est pas minorée.
- (c) Supposons que  $f$  est non surjective, et soit  $y_k \in \mathbb{Q}$  d'indice minimal parmi les éléments de  $\mathbb{Q}$  non atteints par  $f$ . Puisque  $f(X)$  n'a ni plus grand ni plus petit élément d'après 3b, il existe des entiers arbitrairement grands  $i$  et  $j$  tels que  $f(x_i) < y_k < f(x_j)$ . Choisissons successivement :

$$\begin{aligned} i_0 &= \min\{i > k \mid \exists j > k \quad f(x_{i_0}) < y_k < f(x_j)\} \\ j_0 &= \min\{j > k : f(x_{i_0}) < y_k < f(x_{j_0})\} \\ n_0 &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > k \quad x_{i_0} < x_n < x_{j_0}\}, \end{aligned}$$

l'existence de  $n_0$  étant assurée par l'hypothèse  $P1$ . Alors on doit avoir  $f(x_{i_0}) < f(x_n) < f(x_{j_0})$ . Mais l'indice  $h$  tel que  $y_h = f(x_n)$  doit vérifier  $h \geq n > k$ , ce qui est contraire à la construction de  $f$ .