

Devoir n° 4
À rendre le 27 avril 2011

1 Groupes abéliens ordonnés

On dit qu'un groupe abélien $(G, +, 0)$ est *ordonné* si G est muni d'un ordre partiel \leq compatible avec la loi de groupe, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in G, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

Les éléments $x \in G$ tels que $0 \leq x$ (resp., $x \leq 0$) sont appelés *positifs* (resp., *negatifs*), et leur ensemble est noté G_+ (resp., G_-). Un *morphisme* entre groupes abéliens ordonnés est un morphisme de groupes qui est aussi une application croissante.

Exercice 1 (propriétés élémentaires).

1. Soit G un groupe abélien ordonné. Montrer que les propriétés suivantes sont satisfaites :
 - (a) $G_- = -G_+$.
 - (b) $G_+ + G_+ \subset G_+$.
 - (c) $G_+ \cap G_- = \{0\}$.
2. Réciproquement, soit P une partie d'un groupe abélien G , vérifiant $P + P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$. Montrer qu'il existe une unique relation d'ordre faisant de G un groupe ordonné tel que $G_+ = P$, donnée par la relation $x \leq y \iff y - x \in P$.
3. Montrer que l'ordre est total si et seulement si $P \cup (-P) = G$.
4. Dans un groupe abélien G totalement ordonné, on définit la *valeur absolue* par $|x| = \max\{x, -x\}$. Montrer les propriétés usuelles $0 \leq |x|$ et $|x| = 0 \iff x = 0$, et

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

2 Anneaux et corps ordonnés

Un *anneau ordonné* A est un anneau dont le groupe abélien sous-jacent est ordonné, et vérifiant de plus

$$\forall x, y \in A, \quad (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0,$$

ou, autrement dit, $A_+ A_+ \subset A_+$. Un corps est dit *ordonné* s'il est ordonné en tant qu'anneau.

Exercice 2 (propriétés élémentaires des anneaux ordonnés). Soit A un anneau ordonné.

1. Étendre le résultat de l'exercice 1, n° 2, au cas des anneaux.
2. Montrer : $\forall x, y \in A, \quad \forall z \in A_+, \quad (x \leq y) \Rightarrow (xz \leq yz) \wedge (zx \leq zy)$.
3. Discuter le signe du produit xy suivant les signes de x et de y .
4. Montrer que, si A est totalement ordonné, alors $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in A$. En déduire qu'un anneau totalement ordonné et non nul est de caractéristique nulle.
5. Montrer qu'il existe une unique relation d'ordre sur \mathbb{Z} qui fasse de \mathbb{Z} un anneau totalement ordonné.
6. Montrer que, dans un anneau totalement ordonné, la valeur absolue vérifie $|xy| = |x| |y|$.

Exercice 3 (extension de l'ordre d'un anneau intègre à son corps des fractions). Soit A un anneau intègre totalement ordonné, et soit K son corps de fractions. Montrer qu'il existe une unique relation d'ordre sur K qui fasse de K un corps totalement ordonné, et qui étende l'ordre sur A . *Indication* : on remarquera que, dans un corps totalement ordonné, deux éléments non nuls inverses l'un de l'autre ont le même signe. Qu'en déduit-on pour \mathbb{Q} ?

3 Une caractérisation de \mathbb{R}

Groupes et corps archimédiens. On dit qu'un groupe abélien ordonné G est *archimédien* si G est totalement ordonné et vérifie : pour tout couple $(x, y) \in G_+ \times (G_+ \setminus \{0\})$, il existe un entier naturel n tel que $x \leq ny$. On dit qu'un corps est archimédien si son groupe abélien sous-jacent est archimédien.

Rappel sur une construction de \mathbb{R} . On considère la construction suivante du corps des réels : \mathbb{R} est défini comme l'anneau quotient des suites de Cauchy dans \mathbb{Q} , modulo l'idéal des suites convergeant vers 0 dans \mathbb{Q} . On admet que le corps \mathbb{R} ainsi construit est commutatif, complet, archimédien, possède la propriété de la borne supérieure, et que l'ordre sur \mathbb{R} étend celui sur \mathbb{Q} lorsqu'on identifie \mathbb{Q} au sous-corps premier de \mathbb{R} .

Exercice 4. Soit \mathbb{K} un corps ordonné que l'on suppose *commutatif, archimédien et complet* (précisez la notion de suite de Cauchy et de suite convergeante dans un corps commutatif totalement ordonné).

Le corps \mathbb{K} étant de caractéristique nulle d'après le résultat de l'exercice 2, n° 4, on considère l'unique morphisme de corps $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$.

1. Montrer que φ est strictement croissante. En déduire que $\varphi(|x|) = |\varphi(x)|$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q} , alors $(\varphi(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{K} . Montrer également que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de rationnels convergeant vers 0, la suite $(\varphi(x_n))_n$ converge vers 0 dans \mathbb{K} .
3. Montrer qu'il existe un unique morphisme de corps ordonnés $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ qui étende φ .
4. On va montrer que $\tilde{\varphi}$ est surjective.

- (a) Pour tout élément $a \in \mathbb{K}$, montrer qu'il existe un unique entier $E(a) \in \mathbb{Z}$, appelé *partie entière de a* , tel que :

$$E(a)e \leq a < (E(a) + 1)e,$$

où e désigne l'unité de \mathbb{K} .

- (b) On pose $x_n = 2^{-n}E(2^n a)$, pour tout entier naturel n . Montrer que $a = \lim \varphi(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy, et conclure.
5. En déduire le résultat suivant : *Soit \mathbb{K} un corps archimédien et complet. Alors il existe un unique isomorphisme de corps ordonnés de \mathbb{R} sur \mathbb{K} .*