

Interrogation écrite n° 1

Exercice 1.

1. Soit X et Y deux ensembles. Montrer l'existence de l'ensemble des fonctions de X dans Y à partir des axiomes de la théorie des ensembles.
2. Montrer que si A et B sont deux ensembles avec $A \subset B$, alors $\bigcup A \subset \bigcup B$.

Exercice 2. On considère l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, muni de la relation de divisibilité : un entier a *divise* un entier b , noté $a|b$, s'il existe un entier naturel k tel que $b = ka$.

1. Montrer que la relation de divisibilité définit un ordre partiel sur \mathbb{N} .
2. Montrer que \mathbb{N} admet un élément maximum.
3. Montrer que deux éléments $a, b \in \mathbb{N}$ ont toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Identifier $a \wedge b$ et $a \vee b$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble qui a pour éléments tous les singletons. *Indication :* raisonner par l'absurde ; si un tel ensemble X existait, considérer $Y = \bigcup X$ et conclure à une contradiction.

Exercice 4. Soit \leq_X un ordre partiel défini sur un ensemble X .

1. Soit A une partie de X . Montrer que si A admet un plus grand élément m , alors m est aussi la borne supérieure de A .
2. Soit Z une partie de X . On considère sur Z l'ordre partiel noté \leq_Z obtenu par restriction à Z de l'ordre partiel sur X . Exprimer \leq_Z en fonction de \leq_X par une formule ensembliste.
3. Soit A une partie de Z . On suppose que A , qui est aussi une partie de X , admet une borne supérieure dans l'ordre partiel (X, \leq_X) . On note $m = \sup_X A$ cette borne supérieure. On suppose que A admet également une borne supérieure dans l'ordre partiel (Z, \leq_Z) , et on note $n = \sup_Z A$ cette borne supérieure.
 - (a) Montrer que $m \leq n$.
 - (b) Montrer que si $m \in Z$ alors $m = n$.
4. En général, est-il suffisant que A admette une borne supérieure dans (A, \leq_X) pour que A admette une borne supérieure dans (A, \leq_Z) ? Justifier. Inversement, est-il suffisant que A admette une borne supérieure dans (A, \leq_Z) pour que A admette une borne supérieure dans (A, \leq_X) ?