Interrogation écrite n° 2

Correction

Exercice 1.

1. Une *relation* sur X est définie comme une partie de $X \times X$. C'est donc une élément de $\mathcal{P}(X \times X)$.
2. Soit $r \in \mathcal{P}(X \times X)$. En se reportant aux définitions on trouve :

$$\begin{aligned}
&P(r) = \text{« } \forall x \ \big(x \in X \Rightarrow (x,x) \in r\big) \text{ »}\\
&Q(r) = \text{« } \forall x \forall y \forall z \big((x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge (x,y) \in r \wedge (y,z) \in r) \Rightarrow (x,z) \in r\big) \text{ »}\\
&R(r) = \text{« } \forall x \forall y \ \big((x,y) \in r \wedge (y,x) \in r \Rightarrow x = y\big) \text{ »}.
\end{aligned}$$

3. D'après l'axiome de compréhension, on peut construire l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}_X = \{r \in \mathcal{P}(X \times X) \mid P(r) \wedge Q(r) \wedge R(r)\}.$$

L'ensemble $\mathcal{R}_X$ a comme éléments exactement les relations sur X qui sont réflexives, transitives et anti-symétriques. C'est donc l'ensemble des relations d'ordre partiel sur X.

Exercice 2.

1. Soit M un majorant de B. Soit $x \in A$—un tel élément existe puisque A est supposée non vide. Alors $x \in B$ puisque $A \subset B$. Donc $x \leq M$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in A$, il s'ensuit que M est un majorant de A.
2. En particulier, $\sup B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit d'entre eux : donc $\sup A \leq \sup B$.
3. Montrons que $\sup A$ est un majorant de B. Soit $x \in B$ quelconque. Alors, d'après la condition, on choisit $y \in A$ tel que $x \leq y$. Alors $y \leq \sup A$ puisque $\sup A$ est un majorant de A. Donc $x \leq \sup A$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in B$, il s'ensuit que $\sup A$ est un majorant de B. Donc $\sup B \leq \sup A$, et donc $\sup A = \sup B$.

Exercice 3.

1. Soit $x \in X$. Choisissons un élément $y \in Y$ quelconque, ce qui est possible puisque $Y \neq \emptyset$. Posons $s = \{x\}$ et $c = (x,y) = \big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$. Alors $s \in c$. Or $c \in X \times Y$. Par définition de l'union, c'est donc que $s \in \bigcup(X \times Y)$.
2. On a $x \in \{x\} \in \bigcup(X \times Y)$. D'après la définition de l'union, c'est donc que $x \in \bigcup\bigcup(X \times Y)$.