Interrogation écrite n° 2

Exercice 1. Soit X un ensemble.

1. Rappeler la définition d'une *relation* sur X.
2. Soit r une relation sur X. Donner des formules $P(r)$, $Q(r)$ et $R(r)$ qui expriment respectivement que r est une relation réflexive, transitive et anti-symétrique.
3. Montrer l'existence de l'ensemble des relations d'ordre partiel sur X à partir des axiomes de la théorie des ensembles.

Exercice 2. Soit X un ensemble non vide muni d'un ordre partiel noté $\leq$. Soit A et B deux parties non vides de X telles que $A \subset B$. On suppose que A et B admettent toutes deux des bornes supérieures.

1. Montrer que tout majorant de B est aussi un majorant de A.
2. En déduire que $\sup A \leq \sup B$.
3. On suppose que A et B vérifient de plus la condition suivante :

$$\forall x \quad x \in B \Rightarrow \big(\exists y \quad (y \in A) \wedge (x \leq y)\big)\,.$$

   Montrer que $\sup A = \sup B$. *Indication :* commencer par montrer que $\sup A$ est un majorant de B.

Exercice 3. On rappelle que si x et y sont deux ensembles quelconques, le *couple* (x, y) est défini par

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \ ;$$

et si X et Y sont deux ensembles, leur *produit* $X \times Y$ est défini comme l'ensemble des couples (x, y), pour $x \in X$ et $y \in Y$.
Soit X et Y deux ensembles avec Y non vide.

1. Montrer que pour tout élément $x \in X$ le singleton $\{x\}$ appartient à $\bigcup(X \times Y)$.
2. En déduire que pour tout élément $x \in X$ on a $x \in \bigcup\bigcup(X \times Y)$.