Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Théorie naïve des ensembles

1 Axiomes de Zermelo

On rappelle la liste des axiomes :

Axiome d'extensionalité : *Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux.*

$$\forall x\, \forall y\, \big(\forall t\, (t \in x \iff t \in y) \Rightarrow x = y\big)$$

Principe de compréhension restreint : *Pour tout ensemble A et pour toute propriété $F(\,\cdot\,)$, il existe un ensemble B formé des éléments de A qui satisfont la propriété F :*

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\, \big(x \in B \iff (x \in A \wedge F(x))\big)$$

Remarque : F peut contenir des paramètres.

Axiome de la paire : *Pour tous ensemble x et y, il existe un ensemble p dont les éléments sont précisément x et y :*

$$\forall x\, \forall y\, \exists p\, \forall t\, \big(t \in p \iff (t = x) \vee (t = y)\big)$$

Axiome de la réunion : *Pour tout ensemble A, il existe un ensemble U dont les éléments sont les éléments des éléments de A :*

$$\forall A\, \exists U\, \forall x\, \big(x \in U \iff \exists Y\, ((x \in Y) \wedge (Y \in A))\big)$$

Axiome de l'ensemble des parties : *Pour tout ensemble A, il existe un ensemble P dont les éléments sont les parties de A :*

$$\forall A\, \exists P\, \forall X\, (X \in P \iff X \subseteq A)$$

2 Utilisation du langage formel

Exercice 1. Écrire des formules utilisant uniquement les symboles primitif du langage de la théorie des ensembles (soit : symboles logiques, égalité, appartenance et parenthèses) et exprimant :

1. $X = \emptyset$; $\emptyset \in X$; $X \in \emptyset$.
2. $X \subseteq Y$
3. $Y = \bigcup X$; $y \in \bigcup X$
4. $\{x \in A \mid F(x)\} = \{y \in B | G(y)\}$
5. X est la paire $\{u, v\}$; X est une paire, une vraie paire, un singleton.
6. z est le couple (x, y) ; z est un couple.
7. G est le graphe d'une fonction f telle que $f(x) = y$; G est le graphe d'une fonction f injective de A dans B.

Exercice 2. Démontrer en utilisant notamment l'axiome de compréhension restreint, l'existence des ensembles décrits ci-dessous :

1. $E_0 = \big\{\, \{x\}, \quad x \in A \big\}$.
2. $E_1 = \{\bigcup x, \quad x \in A\}$.
3. $E_2 = \{B \cap x, \quad x \in A\}$.

4. L'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.

Exercice 3. Lesquelles des équations suivantes sont-elles vraies ? Y a-t-il au moins une inclusion qui est vérifiée ?

1. $\bigcup \mathcal{P} X = X$.
2. $\mathcal{P} \bigcup X = X$.
3. $\bigcup \mathcal{P} X = \mathcal{P} \bigcup X$.
4. $\mathcal{P}(X \times Y) = \mathcal{P}X \times \mathcal{P}Y$.
5. $\mathcal{P}(X \cup Y) = \mathcal{P}X \times \mathcal{P}Y$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble qui contient comme éléments tous les singletons. *Indication :* si un tel ensemble X existait, considérer $Y = \bigcup X$ et aboutir à une contradiction.

Exercice 5 (couples de Wiener). Montrer que la définition suivante de *couple de Wiener* satisfait bien les propriétés de couples :

$$(x, y) = \Big\{ \{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\} \Big\}$$

Montrer que la définition suivante *n'est pas* une définition correcte de couple : $(x, y) = \{x, \{y\}\}$.

Exercice 6 (apparition de l'axiome du choix). Soit $X \neq \emptyset$, soit $f : X \to Y$ une application et soit i_X et i_Y les applications identité de X et de Y respectivement.

1. On suppose qu'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Montrer que f est injective. Que dire de l'implication inverse, c'est-à-dire de l'existence d'une telle fonction g en supposant que f est injective ?
2. On suppose qu'il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = i_Y$. Montrer que f est surjective. Que dire de l'implication inverse ?
3. Comparer les deux propositions suivantes :
   (a) f est injective ;
   (b) quelles que soient les deux fonctions $h_1, h_2 : Y \to X$, $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ implique $h_1 = h_2$.
4. Comparer les deux propositions suivantes :
   (a) f est surjective ;
   (b) quelles que soient les deux fonctions $g_1, g_2 : X \to Y$, $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implique $g_1 = g_2$.

3 Algèbre de Boole des parties d'un ensemble

Exercice 7 (distributivité). Soit $\mathcal{A} \neq \emptyset$, et soit B un ensemble. Montrer que :

$$B \cup \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{B \cup X \mid X \in \mathcal{A}\}$$
$$C \cap \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{B \cap X \mid X \in \mathcal{A}\}.$$

Exercice 8 (dualité ou règles de de Morgan). Pour $\mathcal{A} \neq \emptyset$, montrer que :

$$B - \bigcap A = \bigcup \{B - X \mid X \in \mathcal{A}\}$$
$$B - \bigcup A = \bigcap \{B - X \mid X \in \mathcal{A}\}$$

Exercice 9 (Images directe et réciproque d'ensembles par une fonction). Soit $f : X \to Y$ une fonction.

1. Montrer les identités suivantes, pour tous ensembles $A, B \subseteq Y$:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

2. Donner une condition suffisante sur f qu'on ait, pour tous ensembles $A, B \subseteq X$:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

   Remarquer qu'au moins une inclusion est toujours vérifiée.
3. A-t-on $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ en général ?
4. Les égalités ensemblistes précédentes se généralisent-elles aux unions et intersections infinies ?
5. Montrer que f est surjective si et seulement si $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est injective.

Exercice 10 (limites supérieures et inférieures). Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble A. On pose :

$$\overline{\lim_{n\geq 0}} A_n = \bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} A_n\,,$$
$$\underline{\lim_{n\geq 0}} A_n = \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{n\geq N} A_n\,.$$

1. Montrer qu'on a toujours $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$.
2. Soit $\{A_n \text{ i.s.}\}$ l'ensemble des éléments $x \in A$ tel que $X \in A_n$ pour une infinité de $n \geq 0$. Montrer que $\overline{\lim} A_n = \{A_n \text{ i.s.}\}$. Interpréter de manière analogue les éléments de $\underline{\lim} A_n$.
3. Identifier les limites supérieures et inférieures si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante ou décroissante.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On pose $A_n = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq x_n\}$. Identifier $\overline{\lim} A_n$.

4 Adjonctions dans les ordres partiels

Exercice 11 (applications croissantes). On dit qu'une application $f : X \to Y$ de $(X, \leq)$ vers $(Y, \leq)$ est *croissante* si

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

1. Si f est une bijection croissante, sa réciproque est-elle croissante ?
2. Si f est croissante, f respecte-t-elle les bornes supérieures ? C'est-à-dire, a-t-on $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$?
3. Si X et Y sont des ordres partiels pour lesquels la borne supérieure de deux éléments existe, et si $f : X \to Y$ est une fonction qui resecte les bornes supérieures, f est-elle croissante ?

Exercice 12 (adjoints dans les ordres partiels). Soit $f : X \to Y$ une application croissante de $(X, \leq)$ vers $(Y, \leq)$. On dit que f est *ajointe à gauche* de l'application croissante $g : Y \to X$ si

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad f(x) \leq y \iff x \leq g(y).$$

Dans ce cas, on dit que g est *adjointe à droite* de f.

1. Si f est une bijection croissante dont l'inverse est croissante, montrer que f admet une adjointe à droite.

2. Montrer que l'adjointe à gauche, si elle existe, est unique.
3. Montrer que les adjonctions se composent.

Exercice 13 (quantificateurs comme adjoints). Soit $f : X \to Y$ une fonction. On note $f^{-1} : \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$ l'application définite par

$$\forall B \subset Y \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \, : \, f(x) \in B\}.$$

Déterminer les adjointes à gauche et à droite, si elles existent, de l'application f^{-1} ainsi définie.

Exercice 14 (l'implication comme adjointe dans les algèbres de Boole). On appelle *treillis distributif* un ordre partiel X tel que deux éléments de X ont toujours une borne supérieure et une borne inférieure, notées $a \vee b$ et $a \wedge b$ respectivement, possédant un plus petit élément et un plus grand élément, notés 0 et 1 respectivement, et tel que

$$\forall a, b, c \in X \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

1. On appelle *complément* d'un élément a tout élément $\neg a$ tel que

   $$\neg a \vee a = 1 \qquad \neg a \wedge a = 0.$$

   Mointrer que, s'il existe, le complément est unique.
2. On appelle *algèbre de Boole* un treillis distributif pour lequel tout élément possède un complément. Montrer qu'alors, pour tout élement a, l'application

   $$f_a : X \to X, \quad f_a(x) = a \wedge x,$$

   possède un adjoint à droite g_a, donné par $g_a(y) = \neg a \vee b$. Généralement, $g_a(y)$ est noté $a \to y$.