

Feuille d'exercices n° 2
Récurrence et dénombrement

Exercice 1 (modèle de Peano). On suppose disposer d'un ensemble A non vide, d'une application $s : A \rightarrow A$ dite *successeur*, et d'un élément $0 \in A$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow s(x) \neq 0$;
- (ii) $\forall x \forall y \quad x \in A \wedge y \in A \wedge s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$.
- (iii) Pour toute propriété $P(\cdot)$ des éléments de A :

$$(P(0) \quad \wedge \quad (\forall y \ P(y) \Rightarrow P(s(y)))) \Rightarrow \forall x \ P(x).$$

Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \forall x \quad f(x^+) = s(f(x)).$$

Montrer que cette fonction f est bijective.

Exercice 2. On se place dans un modèle de Peano quelconque (cf. exercice 1). L'addition et la multiplication sont définies par les équations suivantes :

- (iv) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x + 0 = x$;
- (v) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x + s(y) = s(x + y)$;
- (vi) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \cdot 0 = 0$;
- (vii) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \cdot s(y) = x \cdot y + x$;

Montrer les propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication (associativité, distributivité et commutativité) par récurrence, en procédant dans l'ordre indiqué :

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad 0 + x = x$;
3. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad s(x) + y = s(x + y)$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x + y = y + x$;
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
7. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad 0 \cdot x = 0$;
8. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad s(x) \cdot y = x \cdot y + y$;
9. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \cdot y = y \cdot x$.

Exercice 3 (récurrence et bon ordre en arithmétique). Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Vérifier que si $n^2 = 2p^2$, alors $n > p$, $2p > n$, et $(2p - n)^2 = 2(n - p)^2$. En déduire que pour tous entiers naturels n et p , $n^2 \neq 2p^2$ par deux méthodes : 1) en utilisant une récurrence, et 2) en utilisant directement la propriété de bon ordre sur \mathbb{N} .

Exercice 4 (algèbre linéaire). Soit E un espace vectoriel sur un corps K , et soit $(E_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . On considère l'application linéaire Φ définie ainsi :

$$\Phi : \begin{cases} E_0 \times \dots \times E_n \rightarrow E \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0 + \dots + x_n. \end{cases}$$

On note $\sum_{i=0}^n E_i = \text{Im } \Phi$, et on dit que la famille $(E_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est en somme directe si Φ est injective (c'est-à-dire, lorsque $\text{Ker } \Phi = \{0\}$).

1. Rappeler pourquoi deux sous-espaces vectoriels A et B sont en somme directe si et seulement si $A \cap B = \{0\}$. Qu'en est-il pour trois sous-espaces vectoriels A, B, C ?
2. Montrer que la famille $(E_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est en somme directe si et seulement si

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \quad \left(\sum_{j=0}^i E_j \right) \cap E_{i+1} = \{0\}.$$

On énoncera précisément la propriété à démontrer par récurrence.

Exercice 5 (fonctions harmoniques sur des groupes libres). Soit G un groupe, qu'on suppose engendré par une partie finie S de cardinal n . On dit qu'une fonction $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ est *harmonique* si elle vérifie la propriété de moyenne suivante :

$$\forall x \in G, \quad h(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in S} h(xg).$$

1. Déterminer toutes les fonctions harmoniques, et parmi elles, celles qui sont bornées pour $G = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$.
2. Soit G le groupe libre à deux générateurs a et b , et soit $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ (on rappelle que tout élément de G admet une écriture unique de la forme $x_1 \cdots x_n$ avec $x_i \in S$ et $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$, et que deux telles écritures distinctes désignent deux éléments distincts de G). Montrer qu'il existe une fonction harmonique bornée et non constante sur G .

Exercice 6 (formule des classes pour une action transitive et applications). Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X (c'est-à-dire, on considère un morphisme de groupes de G dans le groupe des bijections de X , noté $(g, x) \mapsto g \cdot x$; on suppose de plus que pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ envoyant x sur y , c'est-à-dire tel que $y = g \cdot x$). On note G_x le stabilisateur d'un élément $x \in X$, défini par :

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

1. (Preliminaire.) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application, alors il existe une bijection

$$X / \sim_f \rightarrow Y,$$

où \sim_f désigne la relation d'équivalence définie sur X par $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$.

2. Revenant au cas des actions de groupes, montrer que les stabilisateurs G_x et G_y de deux éléments x et y de X sont conjugués, et donc équipotents. En déduire que, si G et X sont des ensembles finis, on a la formule des classes :

$$\text{card } X = \frac{\text{card } G}{\#G_x},$$

où $\#G_x$ désigne le cardinal du stabilisateur G_x d'un élément $x \in X$ quelconque.

3. Applications au dénombrement :

- (a) En considérant l'action naturelle de \mathfrak{S}_n sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, retrouver $\text{card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.
- (b) En considérant l'action de \mathfrak{S}_n sur les k -uplets d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, retrouver la valeur du nombre de k -arrangements d'un ensemble à n éléments :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- (c) Indiquer quelle action de \mathfrak{S}_n considérer pour trouver la valeur du coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercice 7 (crible de Poincaré ou principe d'inclusion-exclusion).

1. Soit A et B deux parties finies d'un ensemble X . Montrer que

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

2. Plus généralement, montrer que si A_1, \dots, A_n sont n parties finies d'un ensemble X , alors

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k, \quad \text{avec } S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Exercice 8 (nombre de dérangements, méthode du crible). On appelle dérangement d'un ensemble fini E toute bijection de E dans lui-même sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements d'un ensemble de cardinal n . Le but de l'exercice est de donner une expression de D_n en utilisant l'exercice précédent.

1. Montrer que le nombre de dérangements de E ne dépend que de son cardinal, justifiant ainsi la notation D_n .
2. On prend $E = \{1, \dots, n\}$, et pour $i = 1, \dots, n$ on note A_i l'ensemble des bijections de E laissant fixe i . Montrer que :

$$D_n = \text{card}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = n! - \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

3. Montrer qu'on a, pour tout k et pour tout k -uplet d'entiers (i_1, \dots, i_k) distincts entre 1 et n :

$$\text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!$$

4. En déduire la valeur de D_n :

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 9 (nombre de surjections). Soit n un entier strictement positif. On note $S_{n,p}$ le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

1. Calculer $S_{n,p}$ pour $p > n$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
2. Calculer $S_{p+1,p}$. Pour cela, on remarquera que pour toute surjection $s : \{1, \dots, p+1\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$, il existe un élément x possédant 2 antécédents.

3. Montrer que, pour tout entier $p \geq 0$, on a : $p^n = \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} S_{n,q}$.

4. Démontrer la formule $\sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{q} \binom{q}{k} = 0$, pour tout entier $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

5. En déduire la formule : $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.

6. En déduire que, si $p \geq 2$, on a : $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
7. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$ à l'aide de la formule précédente, et montrer que :

$$S_{p+2,p} = \frac{1}{24}p(3p+1)(p+2)!.$$

8. Montrer comment construire une table pour les $S_{n,p}$ analogue au triangle de Pascal.

Exercice 10 (nombre de dérangements, méthode de sommation). Le but de cet exercice est d'obtenir le nombre D_n de dérangements par une méthode de sommation analogue à celle employée dans l'exercice 9.

1. On pose $D_0 = 1$. Montrer que :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

2. Retrouver l'expression de D_n déjà établie à l'exercice 8, en utilisant l'expression intermédiaire :

$$D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k!.$$