Feuille d'exercices n° 3

Dénombrabilité

Exercice 1 (bijections explicites). Trouver des fonctions bijectives :

1. De $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^\star$.
2. De $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
3. De $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
4. De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$. *Indication :* utiliser une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^\star$.
5. De $\mathbb{R}^\star$ dans $]0,+\infty[$, de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$ puis de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$.

Exercice 2 (quelques équipotences).

1. Soit E un ensemble infini, et soit A une partie infinie dénombrable de E telle que $E \setminus A$ est infinie. Montrer que E est équipotent à $E \setminus A$.
2. Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable. En déduire que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ a même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
3. Établir une bijection entre $[0,1[$ et l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. *Indication :* utiliser le développement en base 2 des réels.
4. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.

Exercice 3 (argument diagonal de Cantor). On suppose que $(c_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels de l'intervalle $[0,1]$.

1. Considérer le développement des réels en base 3 pour disposer dans un tableau les développements de tous les nombres c_n. Construire un réel de $[0,1]$ qui n'appartient pas au tableau.
2. En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4 (d'après Valiron, *Théorie des fonctions*, Masson 1966). Le but de l'exercice est de montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. On considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $[0,1]$, et une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs et convergente, dont la somme vérifie $\sum_{n\geq 0} u_n < 1$. On appelle I_n l'intervalle ouvert de centre x_n et de longueur u_n, pour $n \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe un point de $[0,1]$ qui n'est intérieur à aucun des intervalles I_n.
2. En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5 (discontinuités des fonctions croissantes). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point (autrement dit, tout point de discontinuité de f est de première espèce).
2. Si a est un point de discontinuité de f, on appelle *saut* de f en a la différence $f(a^+) - f(a^-)$. On suppose que I est un intervalle compact. Montrer qu'alors les sommes d'un nombre quelconque de sauts de f sont bornées.
3. En déduire que f admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités si I est compact. Étendre ce résultat au cas où I est quelconque.

Exercice 6 (sommes non dénombrables). Soit I un ensemble d'indices, et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs. Montrer que $\sum_{i\in I} x_i = \infty$ dès que I est infini non dénombrable, où l'on rappelle que $\sum_{i\in I} x_i$ est définie comme suit :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\Big\{ \sum_{j\in J} x_j \,\Big|\, J \text{ fini},\ J \subseteq I \Big\}.$$

Exercice 7 (argument diagonal et fonctions croissantes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathfrak{C}$ est infini.

On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{C}$, et la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i)\,.$$

2. Montrer que $g \in \mathfrak{C}$.
3. Montrer que $g \neq f_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $\mathfrak{C}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 8 (fonctions croissantes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, deuxième méthode). Pour établir le même résultat qu'à l'exercice précédent par une autre méthode, exhiber une bijection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{C}$. En déduire que $\mathfrak{C}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 9 (argument diagonal et fonctions injectives $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des fonctions injectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathfrak{I}$ est infini.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{I}$, et soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par

$$g(n) = \min X_n, \quad \text{avec } X_n = \mathbb{N} \setminus \Big(\big\{ g(p) \mid p < n \big\} \cup \big\{ f_n(n) \big\} \Big).$$

2. Justifier la validité de la définition précédente.
3. Montrer que $g \in \mathfrak{I}$ et que $g \neq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $\mathfrak{I}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 10 (argument diagonal et fonctions surjectives $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Trouver un argument diagonal pour montrer que l'ensemble des fonctions surjectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 11 (fonctions non calculables). Étant donné un langage de programmation, on appelle *fonction calculable* toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dont les valeurs $f(n)$ peuvent être calculées par l'exécution d'un programme à partir de la donnée de l'entier n.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions calculables est dénombrable.
2. En déduire l'existence de fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non calculables.