

Université Paris VII

THÈSE DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : LOGIQUE ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

Modèles fortement stables
du Lambda-calcul
et résultats d'incomplétude

OLIVIER BASTONERO

Soutenue le 10 Décembre 1996

Rapporteurs : Simona Ronchi della Rocca
Antonio Bucciarelli

Jury : SIMONA RONCHI DELLA ROCCA
CHANTAL BERLINE Directrice de thèse
GUISEPPE LONGO
THOMAS EHRHARD
JEAN-LOUIS KRIVINE

Avant propos

Cette thèse est consacrée à l'étude de trois classes de modèles du λ -calcul non typé : les modèles continus [64], les modèles stables [15] et les modèles fortement stables [19].

Les modèles continus usuels, comme le modèle \mathcal{D}_∞ de Scott, ou le modèle de Park, ont des analogues stables (qui ont été introduits par Honsell et Ronchi della Rocca [36]) ainsi que des analogues fortement stables, que nous construisons dans cette thèse.

Initialement la sémantique dénotationnelle du λ -calcul s'inscrit dans un cadre catégorique : la catégorie cartésienne close (c.c.c.) des ordres partiels complets et des fonctions continues. Ici la continuité est relative à une topologie liée à l'ordre partiel, [64, 8, 67]. Précisons que cette catégorie est une c.c.c. avec assez de points et objets réflexifs.

Les notions de stabilité et de forte stabilité proviennent de l'étude de la séquentialité dans un lambda-calcul typé. Ces notions produisent de nouvelles catégories adéquates et donnent ainsi de nouvelles classes de modèles du λ -calcul. Elles ont été principalement étudiées dans le cadre de P.C.F. qui est un λ -calcul typé.

On s'intéresse ici aux modèles du λ -calcul non typé. Par rapport au cas typé, l'étude de ces différentes classes de modèles est radicalement différente, et plus complexe dans le cas non typé. Nous établissons le fait que les notions de continuité, stabilité et forte stabilité donnent des classes de modèles vraiment différentes.

Une construction simple de modèles fortement stables est proposée. Elle produit une large classe de modèles directement exploitables : les i -modèles fortement stables. Le deuxième chapitre est consacré à cette construction ainsi qu'à certaines applications. Nous montrons en particulier que tout i -modèle fortement stable contient une infinité de rétractions universelles.

Nous répondons ensuite à des questions, qui nous ont paru intéressantes et qu'il est naturel de se poser, d'incomplétude et de comparaison, au niveau équationnel, des classes de modèles.

Dans le troisième chapitre nous montrons l'incomplétude de la classe des modèles stables et ce en utilisant un i -modèle fortement stable particulier. Le fait d'utiliser un tel i -modèle permet de donner une démonstration qui évite d'utiliser des arguments syntaxiques. On établit ainsi une méthode sémantique permettant de construire des modèles fortement stables dont la théorie n'est la théorie d'aucun modèle stable. Il est à noter

que montrer qu'une théorie donnée n'est la théorie d'aucun modèle stable est extrêmement difficile, voire impossible, à établir syntaxiquement, voir [32]. De plus cette méthode s'applique à la classe des modèles continus, fournissant une nouvelle démonstration beaucoup moins technique de l'incomplétude de cette classe, [9, 10].

Dans le quatrième chapitre on construit par forcing un modèle continu qui permet de retrouver le résultat d'incomplétude de la classe des modèles stables et qui donne aussi l'incomplétude de la classe des i -modèles fortement stables. Les techniques employées dans ce dernier chapitre sont différentes de celle utilisées dans le chapitre précédent.

Contents

Introduction	7
1 Préliminaires	23
1.1 Notations ensemblistes	23
1.2 Notions de bases et terminologie	24
1.3 Préliminaire en théorie des domaines	26
1.4 Les λ -modèles réguliers	28
1.5 Stabilité sur les DI-domaines	30
1.6 Les i -modèles continus	32
1.6.1 Les espaces de segments initiaux	32
1.6.2 Modèles construits sur un ensemble d'atomes	34
1.7 Les i -modèles stables	35
2 Modèles fortement stables	37
2.1 Notations et définitions	39
2.2 Modèles fonctionnels du λ -calcul	40
2.3 DI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables	41
2.4 Traces	43
2.5 Produits de QDC	45
2.6 Hypercohérences	49
2.6.1 Définitions et propriétés fondamentales	49
2.6.2 Espaces de fonctions	52
2.6.3 Produits d'hypercohérence	56
2.6.4 La fonction \tilde{Eval}	58
2.7 Sous structures et unions croissantes	60
2.8 Morphismes d'hypercohérences	62
2.9 β -modèles et i -modèles fortement stables	63
2.10 Construction élémentaire de i -modèles fortement stables	66
2.10.1 Les modèles \mathcal{D}_∞ fortement stables	66
2.10.2 Les modèles de Park fortement stables	67
2.10.3 Paires hypercohérentes partielles et complétion hypercohérente	69
2.11 Rétractions universelles fortement stables et la théorie RU_∞	71
2.11.1 Rétractions universelles fortement stables	72
2.11.2 La théorie RU_∞	75

3	L'incomplétude de la sémantique stable	79
3.1	Les modèles \mathcal{P}	81
3.2	Le théorème d'incomplétude stable	82
3.3	Cas des modèles continus	86
3.4	Renforcement des résultats d'incomplétude	88
3.5	La théorie de \mathcal{P}_s et celle de \mathcal{P}_{fs} sont incluses dans $T_{\Lambda_i}^{\sigma}$	89
4	Forcing et résultats d'incomplétude	93
4.1	La construction du modèle \mathcal{D}_i	98
4.2	L'interprétation du terme Ω dans un i -modèle continu extensionnel . . .	99
4.3	L'incomplétude stable	107
4.4	L'incomplétude fortement stable	109
	Conclusion	111
A	La propriété d'approximation	117
B	Isomorphismes entre i-modèles fortement stables	123
B.1	Définissabilité de l'ordre dans les DIC	123
B.2	Un critère d'isomorphisme applicatif	126
	Bibliographie	129

Introduction

Les mathématiques contemporaines ont adopté la notion ensembliste de fonction ; les fonctions sont considérées comme des cas particuliers de relations, définies par leur graphe. Mais rien n'est précisé quant à leur aspect opératoire.

Ce point de vue est inadapté à l'informatique, où l'on requiert une présentation des fonctions de façon intensionnelle, c'est à dire par des règles de calcul.

En mathématiques une fonction est regardée comme une boîte noire à laquelle on donne un argument et qui rend un résultat. Le domaine des arguments d'une fonction peut être infini, ce qui est usuel en mathématiques, et donne un caractère infinitaire aux fonctions. Un tel objet ne peut être représenté à l'intérieur d'une machine finie par la donnée explicite de son graphe, qui se trouve être un objet infini. D'où l'échec de cette vue des fonctions en informatique.

Le point de vue informatique sur les fonctions

La représentation usuelle des fonctions, dans une machine donnée, est celle d'algorithme. Intuitivement un algorithme correspond à une façon de calculer une fonction.

Un algorithme ne permet pas la donnée explicite du graphe complet d'une fonction mais permet de générer une partie finie quelconque de son graphe. En donnant de plus en plus d'arguments à l'algorithme, on génère une approximation de plus en plus proche de la fonction. La nature infinie des fonctions oblige à cette notion de représentation approximative. Par exemple si f est une fonctionnelle dépendant de la fonction g , on peut décrire l'algorithme de f en utilisant celui de g , à condition qu'ils existent. L'approximation que l'on obtient de f dépend, entre autre, de celle que l'on obtient de g .

Cette notion d'approximation joue un rôle fondamental dans la sémantique dénotationnelle des calculs.

Le premier langage utilisé pour parler de la théorie de la calculabilité est le λ -calcul, introduit par Church en 1932 [22]. Le but initial était d'apporter un nouveau fondement des mathématiques. Kleene et Rosser ont montré en 1937 l'inconsistance du système initial [45], mais Church publia en 1941 [23] un autre système, plus faible, dont une variante est le λ -calcul actuel. On peut montrer la consistance de ce dernier de façon syntaxique: c'est en effet une conséquence directe du théorème de Church-Rosser, voir [8], p. 62.

Le λ -calcul est un langage avec une syntaxe très simple, composée de deux règles de formation des termes, appelés λ -termes, et essentiellement d'une règle de calcul, la β -

réduction (si un terme T se β -réduit à un autre terme U , on dit simplement que T se réduit à U). C'est une théorie qui étudie les fonctions et leurs comportements applicatifs, l'application étant une opération primitive de cette théorie.

Nous renvoyons à [8, 46, 47, 13] pour un exposé complet sur la syntaxe de ce langage. C'est également une approche syntaxique de la théorie des fonctions : celles-ci sont désignées par les λ -termes. Si U est un λ -terme, $\lambda x U(x)$ désigne la fonction qui à x associe $U(x)$. Un terme de cette forme est appelé une "abstraction".

Ce langage permet de représenter toutes les fonctions récursives partielles et de ce fait donne un modèle simple des fonctions calculables. Pour un exposé complet sur les fonctions partiellement récursives et les fonctions λ -représentable voir [53]. Ainsi une fonction calculable est représentée par une λ -expression suggérant un algorithme possible de cette fonction.

Les termes du λ -calcul peuvent être vus comme des programmes, ou des procédures, pour une machine particulière qui est la donnée du λ -calcul et d'une stratégie de réduction pour la β -réduction. Ainsi le λ -calcul non typé peut être vu comme un langage de programmation de bas niveau. Un langage de programmation est un outil qui permet d'écrire un programme en langage machine de façon à garder, autant que possible, le contrôle sur ce qu'il fera au cours de son exécution. Le rôle du langage machine est joué par le lambda-calcul pur.

En ajoutant des types au λ -calcul on augmente le niveau du langage, les types jouant un rôle de commentaire "mécanique" du programme. Ces commentaires seront vérifiés et effacés lors de la compilation.

On pourra se rapporter à [58] pour une introduction détaillée sur les liens existant entre le λ -calcul et la programmation fonctionnelle.

La sémantique dénotationnelle

Une sémantique dénotationnelle pour un langage donné, est basée sur le choix d'un espace de valeurs, ou de dénotations, dans lequel les termes du langage (ici les λ -termes) sont interprétés de façon à respecter le plus possible la syntaxe du langage. Choisir un espace de valeurs ayant de bonnes propriétés mathématiques peut aider à prouver des propriétés syntaxiques sur les termes. Se donner une sémantique dénotationnelle pour le λ -calcul revient à se donner un objet dans lequel on peut interpréter les λ -termes de telle sorte que les termes β -équivalents soient égalisés. Rappelons que deux termes U et V sont β -équivalents si et seulement si il existe une suite finie de λ -termes $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec, $T_1 = U$, $T_n = V$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, T_i se réduit à T_{i+1} ou T_{i+1} se réduit à T_i . Il existe de telles sémantiques dans lesquelles on donne un sens réellement fonctionnel aux λ -termes qui sont des abstractions, i.e. ceux-ci seront interprétés par de vraies fonctions, voir [67].

L'intérêt de ces interprétations est de dégager, en utilisant les propriétés du type de modèle considéré, certaines théories particulières (l'ensemble d'équations entre termes vérifiées dans le modèle étudié). Un des objectifs recherchés est de trouver un modèle rendant pleinement compte du comportement opérationnel des termes.

La difficulté de cette démarche tient de la nature même des λ -termes. Concrètement tout

λ -terme peut être vu comme une fonction applicable à tout autre terme et en particulier à lui même.

Trouver un modèle fonctionnel du λ -calcul nécessite de trouver un ensemble de valeur \mathcal{D} , appelé domaine, et une notion particulière de fonction de ce domaine dans lui même telle que l'ensemble de ces fonctions de \mathcal{D} dans \mathcal{D} puisse se plonger, en un certain sens, dans \mathcal{D} . Il est bien clair, pour des raisons de cardinalité, que l'on ne peut prendre toutes les applications sur \mathcal{D} (sauf si le domaine est réduit à un point). On considère des domaines et des fonctions ayant certaines propriétés dictées par des intuitions liées à la calculabilité.

Le but est de rendre compte le mieux possible de la lecture fonction/programme qui est sous-jacente à cette approche.

De l'intuition algorithmique à la topologie de Scott

Les domaines que l'on considère sont des ensembles \mathcal{D} dans lesquels on dispose d'une notion d'approximation, ce qui se traduit par le fait que les ensembles \mathcal{D} sont munis d'un ordre partiel, noté $\leq_{\mathcal{D}}$ ou simplement \leq . Si $x, y \in \mathcal{D}$, le fait que $x \leq y$ traduit la notion intuitive " x contient moins d'informations que y ". De plus \mathcal{D} est doté d'un plus petit élément, noté \perp , correspondant à l'information nulle.

Si on suit l'approche algorithmique, il est clair que si un argument x contient moins d'informations qu'un argument y alors le résultat $f(x)$ doit contenir moins d'informations que $f(y)$. Il est naturel de demander que les fonctions que l'on va considérer soient croissantes par rapport à l'ordre partiel de \mathcal{D} .

Il s'avère, toujours pour des raisons de cardinalité, que cette seule propriété n'est pas suffisante pour pouvoir construire un espace de fonctions isomorphe à l'ensemble des valeurs.

Si un programme rend une valeur il ne peut le faire qu'après un calcul fini. Si l'argument d'une fonction est infini un tel calcul ne peut avoir utilisé qu'une partie finie de l'argument. Cette intuition est formalisée par le théorème de continuité syntaxique, qui exprime le fait que seule une approximation finie, en un certain sens syntaxique, d'un terme M est nécessaire pour calculer une approximation finie de $C[M]$, où $C[\]$ est un contexte quelconque, voir [50, 69, 71, 14].

Cette intuition calculatoire se traduit par une restriction supplémentaire sur l'ensemble \mathcal{D} des valeurs et des arguments et sur la notion de fonction à employer.

On demande que \mathcal{D} vérifie certaines propriétés de clôture, plus précisément, si X est un sous ensemble filtrant de \mathcal{D} (i.e. si $x, y \in X$ il existe $z \in X$ tel que $x, y \leq z$), alors la borne supérieure de X , notée $\sqcup X$, existe et appartient à \mathcal{D} . On dit alors que l'ensemble ordonné partiellement \mathcal{D} est complet (\mathcal{D} est un CPO). On peut alors définir une notion de continuité pour des fonctions de \mathcal{D} vers \mathcal{D} :

une fonction f est continue si et seulement si elle commute aux bornes supérieures d'ensemble filtrant.

Cette notion de continuité fait référence à une topologie, déterminée par l'ordre partiel, que l'on peut définir sur les CPO : la topologie de Scott.

Les éléments compacts de cette topologie représentent les éléments contenant une information finie. Les compacts se caractérisent par le fait suivant :

les éléments compacts d'un CPO \mathcal{D} sont les éléments k tels que $k \leq \sqcup X$, pour X filtrant dans \mathcal{D} , implique qu'il existe $x \in X$ tel que $k \leq x$.

Une autre contrainte demandée au CPO est l'algébricité : tout élément est la borne supérieure des éléments compacts qui lui sont inférieurs.

Cette notion correspond à l'idée intuitive d'information. Si on peut calculer toutes les parties finies du graphe d'une fonction, alors on la connaît entièrement.

Une fonction continue vérifie la propriété intuitive suivante :

Soit f une fonction d'un CPO algébrique \mathcal{D} vers un CPO algébrique \mathcal{E} . Si on a une information finie $k \leq f(x)$ alors k est contenu dans l'image par f d'une information finie h de x , i.e. $k \leq f(h)$ avec h un compact inférieur à x . Ceci traduit l'idée que si l'on désire une sortie contenant une information finie il suffit de donner à un programme une entrée finie.

Intuitivement on désire que si une fonction f est plus petite qu'une fonction g cela signifie que, pour toute entrée x , $f(x)$ est moins définie que $g(x)$. Ceci entraîne le fait que l'on considère sur les fonctions l'ordre extensionnel, noté \leq_{ext} , et définie par :

$$f \leq_{ext} g \Leftrightarrow \forall x f(x) \leq g(x).$$

En conséquence l'égalité sur les fonctions est extensionnelle : $\forall x f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$.

Toutes ces notions constituent la base de l'approche dénotationnelle du λ -calcul, et en substance l'approche dénotationnelle de tous les langages de programmation fonctionnels. Nous renvoyons à [67, 54] pour une introduction complète et à [61], [63] et [64] pour les motivations originelles.

Cette notion de continuité rend compte de certains aspects de la calculabilité, mais elle est loin de représenter toutes les propriétés des fonctions calculables.

Il existe des fonctions continues non représentables par un λ -terme, par exemple toutes les fonctions continues ayant un comportement "non séquentiel". L'exemple le plus connu d'une telle fonction est le *ou-parallèle* introduite dans un cadre typé, [66, 56]. Noter que [66] est la publication d'un papier non publié jusqu'alors de Scott datant de 1969.

Pour éliminer ces fonctions on a essayé de formaliser la notion de "séquentialité".

Pour l'essentiel ces travaux ont été présentés dans le cadre de P.C.F., un λ -calcul typé. Ce langage, introduit par Plotkin [56], est un λ -calcul simplement typé, avec des types de base correspondant aux entiers et aux booléens, quelques fonctions de base, comme le successeur, le prédécesseur, la conditionnelle, plus un opérateur de point fixe à chaque type permettant de définir toutes les fonctions récursives partielles. C'est un langage fonctionnel très intéressant d'un point de vue théorique.

Séquentialité, stabilité, forte stabilité : L'exemple de P.C.F.

Un modèle de P.C.F. ayant les domaines plats des entiers et des booléens pour interprétation des types de base est appelé un "modèle standard" de P.C.F.

Dans ce cadre il existe une notion simple de séquentialité, uniquement pour les fonctions

sur les types de base, due indépendamment à Vuillemin, [68], et à Milner, [52].

Donnons ici cette définition, valable en fait pour toute fonction définie sur un produit de domaines plats (c'est à dire tout domaine D tel que, pour tout $u \in D$, $\perp \leq u$ et, pour tous $u, v \in D$ avec $u, v \neq \perp$, u et v sont incomparables).

Soient $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_m$ des domaines plats. Les éléments de $D_1 \times \dots \times D_n$ (resp. $D'_1 \times \dots \times D'_m$) sont des suites indexées par l'ensemble $\{i; 0 \leq i < n\}$ (resp. $\{j; 0 \leq j < m\}$). Les produits de domaines plats sont ordonnés par l'ordre produit, et si α est dans le produit des D_i on note $(\alpha)_i$ la projection de α sur le domaine D_i .

De façon intuitive une fonction est séquentielle s'il existe au moins un argument qu'il faut d'augmenter pour faire croître l'information sur une composante du résultat.

Une fonction continue f de $D_1 \times \dots \times D_n$ dans $D'_1 \times \dots \times D'_m$ est séquentielle si et seulement si f vérifie la condition suivante : pour tout $\alpha \in D_1 \times \dots \times D_n$, pour tout $j < m$, si $(f(\alpha))_j = \perp$ alors l'une des possibilités suivantes est vérifiée :

- pour tout $\beta \in D_1 \times \dots \times D_n$, $\beta \geq \alpha \Rightarrow (f(\beta))_j = \perp$;
- il existe i tel que $0 \leq i < n$ et $(\alpha)_i = \perp$ et, pour tout $\beta \in D_1 \times \dots \times D_n$, si $\beta \geq \alpha$ et $(f(\beta))_j \neq \perp$ alors $(\beta)_i \neq \perp$.

L'indice i est appelé indice de séquentialité de f pour j en α . Noter qu'un tel indice, quand il existe, n'est généralement pas unique.

Cette notion de séquentialité caractérise complètement les objets définissables de P.C.F. pour les fonctions aux types de base. Mais cette notion ne s'étend pas aux objets de type plus complexe. Plusieurs tentatives ont été données pour construire un modèle de P.C.F. dans lequel tous les éléments sont l'interprétation d'un terme, notamment en essayant de trouver un modèle où toutes les fonctions sont séquentielles. Cette recherche est étroitement liée à la recherche d'un modèle complètement abstrait (fully abstract) de P.C.F., voir [52] et [17].

Une manière d'arriver à ce but a été proposée par Kahn et Plotkin [41]. Cette démarche propose de modifier la notion de domaine employé dans la sémantique continue par des objets rendant mieux compte des contraintes calculatoires, les "concrete data structures" (CDS). Ceci permet de définir une notion de séquentialité à tous les types et cette notion de séquentialité est équivalente à celle proposée par Vuillemin-Milner aux types de base. Mais Curien a remarqué que la catégorie de ces objets et des fonctions séquentielles n'est pas cartésienne close, [25]. Pour remédier à ce défaut, Berry et Curien [16] proposent de garder les CDS pour objet et de prendre pour morphisme la notion abstraite "d'algorithme séquentiel", qui est une façon de considérer simultanément les fonctions plus l'information sur la manière de les calculer. On obtient ainsi un modèle de P.C.F., mais c'est un échec du point de vue de la complète adéquation. De plus ce modèle s'écarte du concept de lecture terme/fonction, puisque les termes ne sont plus interprétés par des fonctions mais par des objets ayant deux composantes, l'une comportant l'information

extensionnelle (une fonction continue), l'autre comportant l'information intensionnelle (l'algorithme).

Ceci rend un modèle très proche de la syntaxe et ne donne plus un caractère purement fonctionnel à l'interprétation des termes de P.C.F.

Une autre démarche, qui nous intéresse directement, car elle permet de construire des modèles du λ -calcul pur, est de garder les CPO pour objets et de prendre pour morphismes des fonctions satisfaisant des conditions plus faibles que la séquentialité. Il s'agit des fonctions stables et fortement stables.

La stabilité

La première construction importante s'inscrivant dans cette démarche est l'introduction de la notion de stabilité par Berry [15].

L'idée sous jacente à la stabilité vient du fait qu'une fonction séquentielle f est telle que, si $f(x) \geq c$, pour c compact, alors il existe un c_0 compact et minimum pour la propriété suivante : $c_0 \leq x$ et $f(c_0) \geq c$.

Cette propriété constitue la définition intuitive de la stabilité, et est celle proposée par Berry. Pour mettre en place un modèle de P.C.F. dans lequel toutes les fonctions sont stables, il a fallu introduire une notion particulière de CPO : les DI-domaines. Ces domaines sont des CPO ω -algébriques (l'ensemble des compacts est dénombrable), de plus tout élément compact n'a qu'un nombre fini de minorants et tout sous ensemble non vide admet une borne inférieure (on parlera d'inf).

De plus l'ordre que l'on impose sur les fonctions stables n'est plus l'ordre extensionnel mais l'ordre stable, ou ordre de Berry, noté \leq_s . On dit que $f \leq_s g$ si et seulement si, pour tout $x \leq y$, $f(x) = g(x) \wedge f(y)$ (on note $x \wedge y$ la borne inférieure de x et de y).

Intuitivement $f \leq_s g$ signifie non seulement que f est une approximation de g mais également que le calcul de f approxime celui de g : pour tout x, y tels que $x \leq f(y)$, les fonctions f et g nécessitent la même information sur x pour atteindre y (voir [14]).

Il est nécessaire de considérer l'ordre stable sur l'ensemble $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]$ des fonctions stable d'un DI-domaine \mathcal{D}_1 dans un DI-domaine \mathcal{D}_2 si l'on garantit la stabilité de la fonction d'évaluation $eval$ de $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2] \times \mathcal{D}_1$ vers \mathcal{D}_2 définie par $eval(f, x) = f(x)$ (cette fonction n'est pas stable si on considère l'ordre extensionnel sur $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]$), voir [14].

On peut parler de "modèle standard stable de P.C.F." car les domaines plats des entiers et des booléens sont des DI-domaines.

Dans les DI-domaines la définition intuitive de la stabilité est équivalente à la propriété de commutation aux inf compatibles, i.e. aux inf d'éléments admettant un majorant commun :

une fonction continue f d'un DI-domaine dans un autre est stable si et seulement si, pour tout x, y compatibles, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Ainsi toutes les fonctions séquentielles sont stables, mais l'inverse est loin d'être vrai. Il existe des fonctions stables qui ne sont pas séquentielles et ceci même pour des fonctions

définies sur les types de base. L'exemple le plus connu d'une telle fonction est la fonction de Berry (voir plus loin). Mais cette notion permet déjà d'éliminer certaines fonctions non séquentielles aux types de base comme le ou-parallèle.

Récemment Bucciarelli et Ehrhard ont donné une présentation plus abstraite des algorithmes séquentiels [19, 20]. Ceci leur a permis de dégager le fait que la notion de séquentialité introduite par Kahn et Plotkin peut être représentée comme une condition de préservation analogue à la stabilité, ce qui conduit à s'intéresser à des fonctions qui préservent des infs plus généraux que les infs finis d'éléments compatibles. Il s'agit des fonctions fortement stables.

La forte stabilité

Les objets que l'on considère dans ce cadre pour modéliser P.C.F., sont les DI-domaines avec cohérence, notés DIC. Un DIC est un couple $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ où \mathcal{D} est un DI-domaine et \mathcal{C} est un ensemble acceptable de parties finies et non vide de \mathcal{D} , appelé la cohérence.

Une fonction fortement stable de $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1)$ vers $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}_2)$ est une fonction continue préservant les cohérences et qui commute aux infs des éléments de \mathcal{C}_1 . Il est à remarquer que la notion de fonction fortement stable dépend de la cohérence choisie. On parle de fonction fortement stable relativement à un choix donné de cohérence. On examinera dans les chapitres de cette thèse certaines conséquences dues à cette liberté.

Pour obtenir un modèle du λ -calcul on doit munir les cohérences de certaines propriétés de clôture, on parle alors de cohérence acceptable. Alors une fonction fortement stable est stable mais l'inverse est faux. Notons toutefois que la notion de stabilité est un cas particulier de la notion de forte stabilité, voir page 42.

Pour ordonner les fonctions fortement stables on est amené, pour les mêmes raisons que précédemment, à choisir l'ordre stable.

Le modèle standard fortement stable de P.C.F. est celui où les types de base sont interprétés par les DI-domaines plats des entiers et des booléens, munis d'une cohérence bien particulière, voir [20, 18].

Un résultat récent de Ehrhard [27] montre que toutes les fonctions du modèle standard fortement stable de P.C.F. sont séquentielles en un certain sens technique. En fait, la forte stabilité traduit complètement la définissabilité aux types de base; toutes les fonctions fortement stables aux types de bases sont séquentielles au sens de Milner-Vuillemin. Mais il existe des fonctionnelles fortement stables non définissables par des termes de P.C.F., voir [18].

Les modèles standards de P.C.F. continu, stable et fortement stable ont des théories équationnelle incomparables

Esquissons la démonstration de ce résultat (pour la démonstration complète nous renvoyons à [18]).

Le point clef est l'existence d'objets non définissables (qui ne sont pas l'interprétation

d'un terme de P.C.F.) dans les trois modèles fonctionnels standards de P.C.F.

La méthode employée est la suivante :

on exhibe, dans un des trois modèles, f une fonction ou une fonctionnelle n'existant pas dans les deux autres modèles; on exhibe alors deux termes de P.C.F. distingués par f et égalisés dans les modèles ne contenant pas f .

Rappelons que l'ensemble plat des booléens est l'ensemble $\mathcal{B} = \{\perp, V, F\}$ avec V, F incomparables.

Notons respectivement T_c , T_s et T_{fs} les théories équationnelles des modèles standards de P.C.F. continu, stable et fortement stable.

Donnons la définition des fonctions particulières utilisées pour établir ce résultat, toutes définies sur un produit de \mathcal{B} et à valeurs dans \mathcal{B} .

Les fonctions OG (ou-gauche), OD (ou-droit) et OUP (ou-parallèle) sont respectivement les plus petites fonctions continues de \mathcal{B}^2 dans \mathcal{B} vérifiant :

$$\begin{aligned} OG(V, \perp) &= V, \quad OG(F, F) = F, \\ OD(\perp, V) &= V, \quad OD(F, F) = F, \\ OUP(V, \perp) &= OUP(\perp, V) = V \text{ et } OUP(F, F) = F. \end{aligned}$$

La fonction g_t (fonction de Berry) est la plus petite fonction continue de \mathcal{B}^3 dans \mathcal{B} vérifiant :

$$g_T(\perp, V, F) = g_T(F, \perp, V) = g_T(V, F, \perp) = V \text{ et } g_T(F, F, F) = F.$$

Notons que les fonctions OG et OD sont définissables et donc sont stables et fortement stables; que la fonction OUP n'est pas stable (et donc pas fortement stable); et que la fonction g_t est stable mais pas fortement stable.

Il s'ensuit que OUP et g_t ne sont pas définissables.

La fonction OUP permet de montrer que $T_s \not\subseteq T_c$ et $T_{fs} \not\subseteq T_c$.

La fonction g_t permet de montrer que $T_{fs} \not\subseteq T_c$ et $T_{fs} \not\subseteq T_s$.

Pour montrer qu'il existe des termes qui sont différenciés dans le modèle stable et le modèle fortement stable, mais sont égalisés dans le modèle continu on utilise le fait qu'il existe des fonctionnelles stables et fortement stables qui n'existent pas dans le modèle continu, par exemple le "séparateur de ou".

On peut définir dans le modèle stable et le modèle fortement stable une fonctionnelle qui sépare OG et OD . Cette fonctionnelle est appelée un *séparateur de ou* et est notée SEP et est définie par :

$$SEP(OD) = V \text{ et } SEP(OG) = F.$$

Les fonctions OG et OD sont majorées dans le modèle continu par la fonction OUP et évidemment SEP n'existe pas dans le modèle continu car alors on aurait $SEP(OUP) \geq V, F$, qui sont incompatibles.

Cette fonctionnelle permet d'établir que $T_c \not\subseteq T_s$ et que $T_c \not\subseteq T_{fs}$.

On utilise de même le fait qu'il y a des fonctionnelles fortement stables qui n'existent pas dans le modèles continu et le modèle stable, toujours pour les mêmes raisons liées à la séparabilité, pour exhiber des termes différenciés dans le cas fortement stable et égalisés dans les cas continu et stable.

On utilise, de façon analogue à l'exemple précédent, un séparateur de deux fonctions définissables particulières qui sont majorées dans les modèles continu et stable par g_t . On montre ainsi que $T_c \not\subseteq T_{fs}$ et que $T_s \not\subseteq T_{fs}$.

Les modèles du lambda-calcul pur

Un panorama varié

D'une façon générale un modèle du λ -calcul pur est un objet réflexif d'une catégorie cartésienne close (c.c.c.) avec assez de points, ceci permettant d'interpréter de façon adéquate les λ -termes. Pour un exposé complet sur les modèles on se rapportera à deux livres [8, 35] et aux articles suivants [6, 34, 49, 51, 59].

Nous disposons dorénavant de trois classes de modèles du λ -calcul non typé : les modèles continus, stables et fortement stables.

La sémantique continue s'inscrit dans la catégorie des CPO et des fonctions continues. Le premier modèle construit par Scott en 1969, [61, 64], est donné dans ce cadre. Tous les modèles continus que nous considérerons seront des CPO munis de propriétés supplémentaires comme l'algébricité ou la distributivité.

Pour la sémantique stable le cadre le plus couramment utilisé, qui est également le cadre original, est celui des DI-domaines, qui englobe les domaines qualitatifs et les espaces cohérents ([30]).

Ce n'est pas le seul cadre dans lequel la sémantique stable a un sens. On trouve dans [3] une étude des différentes c.c.c. de la sémantique stable. Dans la structure la plus générale la stabilité est définie par la propriété de commutation aux infis finis d'éléments compatibles, mais elle n'est plus équivalente à la définition intuitive donnée par Berry. Si l'on s'intéresse à la modélisation de l'aspect opératoire du λ -calcul, la notion de stabilité n'a d'intérêt que sur une c.c.c. où la stabilité (interne) correspond à la définition introduite par Berry. De plus dans une telle c.c.c. les fonctions stables peuvent être représentées par des traces stables, voir [30]. Pour garder la correspondance des deux définitions on doit considérer des structures comme les DI-domaines ou les domaines stables bifinis d'Amadio. On donne plus de détails sur ces considérations dans l'introduction du troisième chapitre.

On peut construire des modèles du λ -calcul pur dans le cadre fourni par les DI-domaines avec cohérence, qui est actuellement le cadre le plus général dans lequel la forte stabilité est définie.

Rappelons que les notions de stabilité et de forte stabilité proviennent de l'étude de la séquentialité dans le λ -calcul typé. Les notions de séquentialité existantes n'ont plus de sens dans le cadre des modèles du λ -calcul pur. De plus les problèmes de définissabilité

et de complète adéquation de ces modèles par rapport à des sémantiques opérationnelles particulières sont peu connus et souvent beaucoup plus complexes que dans le cas typé.

Les questions naturelles que l'on peut se poser sont :

Ces trois classes de modèles sont-elles complètes vis à vis des théories consistantes du λ -calcul?

Ces classes sont-elles équationnellement différentes? Ou plus précisément le spectre des théories atteintes par les modèles d'une de ces classes est-il le même que celui atteint par les deux autres?

En marge à ces questions se pose également le problème de comparer les modèles d'une même classe et de comparer des modèles analogues de différentes classes.

Pour étudier ces propriétés, la première exigence que l'on se fixe est de se donner, et ce de façon interne à ces trois sémantiques, des classes de modèles simples qui soient les plus générales possibles.

La notion de simplicité que nous considérons pour une classe de modèle est la conjonction des deux exigences suivantes :

- avoir une construction élémentaire, i.e. n'utilisant pas les limites inverses, et relativement uniforme pour ces trois sémantiques;
- obtenir des modèles dans lesquels les interprétations des λ -termes soient aisées et manipulables directement.

Les réponses apportées à ces questions

Une des questions posées est de se demander si ces classes de modèles sont complètes, c'est-à-dire si elles contiennent toutes les λ -théories. Cette question a été soulevée par Honsell et Ronchi pour la classe des modèles continus (*CPO* réflexifs), et ces auteurs y ont répondu négativement [37]. Plus précisément, ils ont montré qu'il n'existe pas de modèle continu dont la théorie est $T_{\overline{\Lambda^0}}$, la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement clos.

Le principal résultat énoncé dans le troisième chapitre, établi en collaboration avec Gouy, voir [9, 10], est l'incomplétude de la classe des modèles stables (DI-domaines réflexifs). On montre que la théorie de l'analogue fortement stable du modèle de Park n'est la théorie d'aucun modèle stable. Notre démonstration diffère fortement de celle proposée par Honsell et Ronchi par le fait que nos arguments sont purement sémantiques. En fait, on extrait un ensemble très simple, \mathcal{F}_1 , d'équations et d'inéquations, qui est modélisé par le modèle de Park fortement stable et qui n'est modélisé par aucun modèle stable. La méthode proposée ici peut, de plus, s'adapter aux modèles continus : on exhibe un autre ensemble très simple, \mathcal{F}_2 , d'équations et d'inéquations, qui est modélisé par les analogues stables et fortement stables du modèle de Park et par aucun modèle continu. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est modélisé par le modèle de Park fortement stable

et par aucun modèle stable ni aucun modèle continu. On montre de plus que les modèles de Park continu et stable ont des théories incomparables ce qui infirme une conjecture de Honsell et Ronchi qui affirmait que la théorie du modèle de Park stable est strictement incluse dans celle du modèle de Park continu [36].

Enfin, en étendant l'utilisation du théorème d'approximation de Honsell et Ronchi [37], qui est rappelé en annexe, aux cadres stable et fortement stable, on montre que $T_{\Lambda_I^0}$, la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement λI -clos, n'est la théorie d'aucun modèle stable.

Il est à remarquer que pour établir le résultat de *l'incomplétude* de la classe stable on s'inspire de la méthode utilisée pour montrer *l'incomparabilité* des théories des modèles standards de P.C.F.

On arrive à donner, sous forme d'un ensemble d'équations et d'inéquations, noté \mathcal{F} , des conditions suffisantes permettant de définir une version non typée de la fonction de Berry [15] dans un modèle stable. On montre ensuite que dans tous les modèles stables satisfaisant \mathcal{F} , cette fonction permet de distinguer deux termes X et Z égalisés dans un modèle fortement stable particulier, ici l'analogue fortement stable du modèle de Park, satisfaisant \mathcal{F} .

Nous avons ainsi élaboré une technique permettant d'utiliser la variété des modèles dont on dispose pour obtenir un résultat d'incomplétude. Cela répond en plus à la question de savoir si les classes de modèles proposées sont équationnellement distinctes. De plus on utilise réellement le fait d'avoir à notre disposition les classes de modèles simples que constituent les i -modèles (voir plus loin).

Dans le quatrième chapitre de cette thèse nous revisitons l'incomplétude des modèles stable en exhibant un i -modèle continu dont la théorie n'est la théorie d'aucun modèle stable et d'aucun i -modèles fortement stable. Nous expliquons en détail pourquoi on est obligé de se restreindre aux i -modèles dans le cas fortement stable, précisons simplement que cela est lié à la grande difficulté de donner des raisonnements valables dans tous les DIC, du fait que dans ce cadre général on ne peut s'assurer de la forte stabilité que de fonctions très simples comme les fonctions en estrades, voir 42, ce qui est une restriction forte et ne nous permet pas, dans l'état actuel de nos connaissances, d'établir ce résultat d'incomplétude pour toute la classe des DI-domaines réflexifs.

On a rappelé dans cette introduction comment on montre que la théorie équationnelle du modèle continu standard de P.C.F. n'est pas incluse dans celle du modèle standard stable. Pour montrer cela on utilise l'existence d'une fonctionnelle, SEP , séparant deux fonctions définissables, OG et OD , majorées dans le modèle continu par OUP et non majorées dans le modèle stable.

Le problème majeur auquel on est confronté quand on veut adapter ce même procédé aux modèles du λ -calcul non typé est la définissabilité des fonctions utilisées. On est plus confronté à des problèmes d'incomparabilité de théories de quelques modèles fixés mais à des problèmes d'incomplétude, c'est à dire concernant une large classe de modèle. On a pas de terme définissant des fonctions mimant OD et OG de façon uniforme pour

tous les modèles d'une classe donnée. Dans le cadre de P.C.F. ces fonctions vont d'un domaine fini (\mathcal{B}^2) dans un domaine fini (\mathcal{B}), et donc il est facile de trouver des termes de P.C.F. décrivant complètement ces fonctions pour les trois modèles standards. Ce n'est évidemment plus le cas dans les modèles du λ -calcul non typé et nous n'avons pas réussi à y transposer cette méthode.

Nous avons évité ces problèmes en utilisant une démarche différente. L'idée est d'utiliser la différence existant au niveau fonctionnel entre l'ordre des modèles continus d'une part, et celui des modèles stables et fortement stables, de l'autre. Dans le cas continu il s'agit de l'ordre extensionnel et dans les cas stables et fortement stables il s'agit de l'ordre stable.

Des modèles simples : les i -modèles

Le point de vue que nous adoptons pour répondre à ces exigences est celui donné par Krivine pour la sémantique continue et stable dans [47] et par Honsell et Ronchi dans [36] pour le cas stable : les i -modèles continus et stables.

Ce sont des classes de modèles, dans lesquelles on peut représenter les modèles usuels comme le modèle de Scott, le modèle de Park, le modèle d'Engeler, ..., mais dans lesquelles on peut éviter constructions par limites inverses.

On se donne un ensemble D muni d'un préordre \leq (resp. d'une relation de cohérence \simeq). On considère ensuite $D_f \times D$, où D_f est l'ensemble des parties finies de D , que l'on muni d'un préordre \leq_p déduit de \leq (resp. $\mathcal{D}_c \times D$, où \mathcal{D}_c est l'ensemble des parties cohérentes de D , que l'on équipe d'une relation de cohérence \simeq_p déduite de \simeq).

Soit i une injection de $D_f \times D$ dans D (resp. de $\mathcal{D}_c \times D$ dans $\overset{p}{D}$) respectant certaines propriétés vis à vis des préordres (resp. des relations de cohérence). Noter que les ensembles $D_f \times D$ (resp. $\mathcal{D}_c \times D$) sont les trames des espaces des traces des fonctions continues (resp. stables) de \mathcal{D} dans \mathcal{D} . Une des raisons de la maniabilité des interprétations des termes dans ces modèles est que l'on code les traces des fonctions plutôt que les fonctions elles mêmes.

Alors la paire (D, i) engendre un triplet (\mathcal{D}, F, G) qui constitue un modèle du λ -calcul où le domaine \mathcal{D} est dans le cas continu l'espace des segments initiaux de D et dans le cas stable l'espace des parties cohérentes de D . On note simplement $\mathcal{D}_{(D,i)}$ le triplet (\mathcal{D}, F, G) .

Les constructions catégoriques sont remplacées par des constructions ensemblistes élémentaires sur les trames.

L'interprétation des termes dépend de l'injection i , qui constitue le paramètre intéressant de cette construction. On a une grande liberté de choix pour i (avec quelques contraintes à respecter par rapport au préordre ou à la relation de cohérence). Ce choix autorise la construction de nombreux modèles très différents.

La forte stabilité, du fait de la complexité des objets à employer, produit, dans le cadre très général des DIC, des modèles inexploitablement pratiquement. C'est pourquoi nous consacrerons le deuxième chapitre à la construction d'une classe de modèles, similaire pour

la forte stabilité à ce que sont les i -modèles pour la continuité et la stabilité. On obtient la classe des i -modèles fortement stables. Ceci nous permet dorénavant de construire et de manipuler de façon relativement aisée des modèles fortement stables du λ -calcul pur. Le cadre dans lequel peut s'effectuer cette construction est donnée par les hypercohérences, notion introduite par Ehrhard, [26]. On trouve dans l'introduction du deuxième chapitre une motivation à l'introduction de cette notion. Précisons simplement que les hypercohérences permettent de relier étroitement cohérence et DI-domaine en les définissant à partir d'une trame commune.

Il existe une classe un peu plus générale de modèles construits à partir de trame à savoir les modèles de filtre, donnée initialement pour la sémantique continue dans [24, 7].

Nous n'avons pas choisi de considérer cette approche tout d'abord parce que la classe des i -modèles suffit pour répondre aux questions posées. De plus l'adaptation de cette construction au cas stable est plus difficile et donne des modèles moins maniables. Il semble que l'adaptation de cette construction au cadre fortement stable n'est pas aussi aisée que celle donnée pour la construction de Krivine.

Plan de la thèse

Chapitre 1 : C'est un chapitre de préliminaires.

Une rapide présentation est donnée des CPO, DI-domaines, domaines qualitatifs et espaces cohérents. On rappelle les notions de continuité et de stabilité.

Les catégories régulières, introduites dans [32], contiennent manifestement "toutes" les sémantiques fonctionnelles et en particulier les trois qui sont étudiées ici. Cette notion est rappelée dans ce chapitre.

Nous donnons une présentation détaillée des i -modèles continus ainsi que des i -modèles stables.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à la forte stabilité. Nous donnons une présentation détaillée de cette notion dans le cadre le plus général, celui des DIC (section 2.3).

Nous avons choisi de donner une construction de modèle fortement stable sans mention catégorique. On fixe le cadre dans lequel on se place : celui des domaines qualitatifs avec cohérence (QDC). On montre que l'on peut définir dans ce cadre des modèles fonctionnels (notion que l'on rappelle dans la section 2.2 en suivant la présentation de [46]). Pour cela on a besoin de définir avec soin ce qu'est le produit de deux QDC et la notion de fonction fortement stable à plusieurs variables. C'est ce qui est fait dans les sections 2.4 et 2.5.

Ensuite on introduit en détail les hypercohérences, section 2.6, et les sections 2.7 et 2.8 sont consacrées à l'étude de certaines de leurs propriétés nécessaires à la construction de i -modèles fortement stables et aux morphismes d'hypercohérences.

Nous donnons dans la section 2.9 la définition des i -modèles fortement stables et dans la section 2.10 on construit deux exemples importants de i -modèles fortement stables : les analogues fortement stables des modèles \mathcal{D}_∞ de Scott et les modèles de Park.

Enfin dans la section 2.11 on montre que tout i -modèle fortement stable satisfait la théorie RU_∞ introduite dans [31] qui exprime l'existence d'une infinité de rétractions

universelles.

Chapitre 3 : Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Gouy. Nous prouvons dans ce chapitre que la classe des modèles stables est incomplète vis à vis du λ -calcul pur. Plus précisément, nous montrons qu'il n'y a pas de modèle stable ayant pour théorie celle du modèle de Park fortement stable. Nous obtenons ainsi une démonstration sémantique de ce résultat d'incomplétude, qui peut être adaptée à la classe des modèles continus.

La section 3.1 donne quelques propriétés des i -modèles de Park stables et fortement stables construits sur un ensemble d'atomes réduits à un point. Le fait de travailler avec les i -modèles permet de donner les propriétés sans l'introduction de démonstrations syntaxiques, notamment en évitant l'usage du théorème d'approximation.

Nous donnons dans la section 3.2 le résultat d'incomplétude stable. On montre que la théorie du i -modèle de Park fortement stable n'est la théorie d'aucun modèle stable.

Dans la section 3.3 nous adaptons ce résultat à la classe des modèles continus.

Dans les sections 3.4 et 3.5 on renforce ces résultats en isolant une théorie contextuelle particulière qui a un sens opérationnelle et qui n'est pas atteinte par les modèles stables. On a besoin cette fois d'utiliser un théorème d'approximation que l'on donne en annexe.

Chapitre 4 : Nous donnons dans ce chapitre une nouvelle démonstration de l'incomplétude stable, en utilisant cette fois un modèle continu que nous construisons dans la section 4.1. Cette nouvelle preuve n'utilise pas la forte stabilité. De plus on montre l'incomplétude de la classe des i -modèles fortement stables en utilisant ce même modèle continu.

Pour se faire on exploite la différence existant au niveau fonctionnel entre l'ordre des modèles continus d'une part, et celui des modèles stables et fortement stables, de l'autre. La section 4.1 est consacrée à la construction du modèle continu. On exploite la condition nécessaire et la condition suffisante pour qu'un élément α soit dans l'interprétation du terme Ω dans un modèle de segments initiaux. Dans [5], une preuve sémantique de la facilité de Ω est donnée. Celle ci consiste à construire par forcing une injection adéquate de $\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}$ vers \mathbb{N} et ainsi de produire un modèle continu de $LC + \Omega = t$, pour tout terme clos t .

Dans [72] on trouve une construction par forcing dans le cadre des modèles de graphes. Enfin dans [40] est exposé le même type de construction dans le cadre des segments initiaux, produisant ainsi des modèles continus de $LCE + \Omega = t$.

C'est cette dernière méthode de construction que nous allons employer pour produire un modèle continu extensionnel dans lequel Ω sera interprété par un segment initial donné. Dans la section 4.2 on montre que l'on peut alors déduire de nombreuses équations et inéquations satisfaites dans ce modèle. Cela nous permet d'en dégager un ensemble particulier \mathcal{F}_1 et de trouver deux termes particuliers qui s'avéreront égaux dans ce modèle du fait de l'ordre imposé.

Nous montrons dans la section 4.3 que la théorie de ce modèle continu n'est la théorie d'aucun DI-domaine réflexif.

Enfin on montre dans la section 4.4 l'incomplétude de la classe des i -modèles fortement stables en utilisant ce même modèle continu.

Nous nous restreignons à cette classe car l'une des fonctions employées dans la section

précédente n'est pas forcément fortement stable dans le cadre général des DIC réflexifs. Par contre on peut montrer sa forte stabilité dans les i -modèles fortement stables.

L'annexe A est consacrée à une extension du théorème d'approximation de Honsell et Ronchi à une large classe de modèles. Ceci nous permettra d'utiliser un théorème d'approximation dans les cadres stables et fortement stables afin de renforcer certains résultats d'incomplétude dans le troisième chapitre.

L'annexe B est consacrée à deux points intéressants.

On montre la définissabilité uniforme de l'ordre par une formule de la logique du premier ordre, à partir de la seule application, dans tous les DIC réflexifs.

Puis on en déduit un critère d'isomorphisme fort (l'existence d'un isomorphisme applicatif, fortement stable et dont l'inverse est fortement stable) pour la classe des i -modèles fortement stables. On en déduit l'existence de 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non fortement équivalents.

On expose ensuite les questions liées à ces problèmes d'isomorphismes qui restent ouvertes à ce jour pour les modèles fortement stables; en particulier l'existence de 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non équationnellement équivalents.

Chapter 1

Préliminaires

Nous donnons dans ce chapitre toutes les définitions et les propriétés nécessaires à la bonne compréhension de cette thèse.

Nous commençons par rappeler quelques notions en théorie des domaines. Nous employons différentes sémantiques fonctionnelles du lambda calcul ce qui requiert une manipulation de certains types d'ensembles partiellement ordonnés spécifiques à ces sémantiques. On présente de façon rapide ces objets ainsi que certaines de leurs propriétés.

Ensuite est donné un cadre qui contient toutes les sémantiques utilisées ici, à savoir celui des catégories régulières, introduites dans [32].

Puis un rapide rappel de la notion de stabilité, qui est un outil central dans cette thèse, est donné.

Enfin, on présente une large classe de modèles continus, les i -modèles continus, dus à Krivine [46], et qui possèdent des analogues stables dans les espaces cohérents, à savoir les i -modèles stables. Cette dernière classe de modèles à été introduite dans [46] et indépendamment dans [36]. Nous donnons à la fin de ce chapitre une présentation succincte de ces modèles. On utilise les i -modèles pour leur grande souplesse d'utilisation. Une partie du chapitre suivant sera consacré à la construction de i -modèles fortement stables.

1.1 Notations ensemblistes

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X , $x \in \mathcal{P}_f(X)$ sera noté $x \subseteq_f X$ et $\mathcal{P}_f^*(X)$ l'ensemble des parties finies non vides de X , $x \in \mathcal{P}_f^*(X)$ sera noté $x \subseteq_f^* X$. On désignera aussi parfois les parties finies d'un ensemble X par X_f . Si $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$, on note $Y^{>1}$ l'ensemble des éléments de Y qui ont un cardinal strictement supérieur à 1. On désignera par $\#x$ le cardinal de l'ensemble x .

Dans tout ce qui suit nous utiliserons très souvent les abréviations suivantes :

1. Si $a \subseteq X$ et f est une fonctions de X vers Y on note $f(a) = \{f(\alpha)/\alpha \in a\}$. Dans les cas où il pourrait y avoir une ambiguïté on notera $f^\bullet(a)$.
2. De même si $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ et f est une fonctions de X vers Y on note $f(A) = \{f(a)/a \in A\}$. Dans les cas où il pourrait y avoir une ambiguïté on notera $f^{\bullet\bullet}(A) =$

$$\{f^\bullet(a)/a \in A\}.$$

3. Si $x \in X$ et \mathcal{F} est un ensemble de fonctions de X vers Y on note :
 $\mathcal{F}(x) = \{f(x)/f \in \mathcal{F}\}.$
4. Si $A \subseteq X$ et \mathcal{F} est un ensemble de fonction de X vers Y on note :
 $\mathcal{F}(A) = \{f(x)/(f, x) \in \mathcal{F} \times A\}$

1.2 Notions de bases et terminologie

On rappelle la syntaxe du λ -calcul, introduit dans [23]. On trouvera toutes les démonstrations, ainsi qu’une exposition beaucoup plus complète de ces notions dans [8] ou [46].

Soit \mathcal{V} un ensemble dénombrable de variables, l’ensemble des termes du λ -calcul est le plus petit ensemble Λ satisfaisant :

- $\mathcal{V} \subset \Lambda$
- Si $t \in \Lambda$, alors $\lambda x t \in \Lambda$, pour toute variable x dans \mathcal{V} .
- Si $t, u \in \Lambda$ alors $(t)u \in \Lambda$.

Des exemples de termes sont donnés par $\mathbf{I} = \lambda x x$, $\mathbf{\Omega} = (\lambda x (x)x)\lambda x (x)x$ et $\lambda x \mathbf{\Omega}$.

Pour tout ensemble de constantes C , l’ensemble $\Lambda(C)$ des λC -termes est défini par induction de la façon suivante :

les variables et les constantes sont des λC -termes,

si u, v sont des λC -termes et x est une variable, alors $(u)v$ et $\lambda x u$ sont des λC -termes.

Fixons la terminologie et les notations employées.

Dans la suite, les termes seront toujours considérés à α -équivalence près, c’est à dire à renommage près des variables liées.

Dorénavant Λ désignera le quotient de l’ensemble des λ -termes par la α -équivalence, et par Λ^0 le sous-ensemble des termes clos.

Nous utiliserons la notation applicative de [47] : $(\mathbf{u})\mathbf{v}$ désigne l’application de u à v . Une expression de la forme $(u)v_1 \cdots v_n$ est une abréviation pour $(\cdots(u)v_1)v_2 \cdots)v_n$.

Nous noterons $Vl(t)$ l’ensemble des variables libres du terme t et $t[x_1, \cdots, x_n]$ signifie que les variables libres de t se trouvent parmi x_1, \cdots, x_n . Nous abrègerons parfois $(\cdots(u)v_1) \cdots)v_n$ en $(u)v_1 \cdots v_n$, x_1, \cdots, x_n , ou plus généralement v_1, \cdots, v_n , en \bar{x} , ou \bar{v} , et $\lambda x_1 \cdots \lambda x_n t$ en $\lambda \bar{x} t$; nous noterons $l(\bar{x})$ (resp. $l(\bar{v})$) la longueur de \bar{x} (resp. \bar{v}).

Un contexte $C[]$ est un terme avec un ou plusieurs “trous”. Plus formellement :

- Si $x \in \mathcal{V}$ alors x est un contexte.
- $[]$ est un contexte.

- Si $C_1[]$ et $C_2[]$ sont des contextes alors $(C_1[])C_2[]$ et $\lambda x C_1[]$ sont des contextes.

Nous ne définissons pas en détail ici la notion de substitution de n λ -termes \bar{v} à n variables \bar{x} du λ -terme u , ce qui se note $u[\bar{v}/\bar{x}]$. Nous renvoyons le lecteur aux références données. Disons qu'intuitivement le terme $u[\bar{v}/\bar{x}]$ est le résultat de la substitution, pour tout $i \leq n$, de v_i à toutes les occurrences libres de x_i dans u , en prenant garde de ne pas lier une variable libre de v_i .

La théorie équationnelle λ est l'ensemble d'équations $M = N$, où $M, N \in \Lambda$, qui est axiomatisé par les axiomes et les règles d'inférences suivantes :

- $(\lambda x u)v = u[v/x]$ (si aucune variable libre de v n'est liée dans u),
- $u = u$,
- $u = v \Rightarrow v = u$,
- $u = v, v = w \Rightarrow u = w$,
- $u = v \Rightarrow (u)w = (v)w$,
- $u = v \Rightarrow (w)u = (w)v$,
- $u = v \Rightarrow \lambda x u = \lambda x v$.

Le λ -calcul extensionnel est obtenu en ajoutant à λ l'axiome d'extensionnalité : $Mx = Nx \Rightarrow M = N$ à condition que la variable x ne soit pas libre dans M et N .

Le fait que ces théories soient consistantes (c'est à dire ne contiennent pas toutes les équations, ou encore que le modèle des termes ne soit pas réduit à un point) est une conséquence du théorème de Church-Rosser, voir [8].

Fait 1.2.1 λ +extensionnalité équivaut à $\lambda + \eta$ où η est l'axiome suivant : $\lambda x (t)x = t$ pour tout $t \in \Lambda$ tel que la variable x n'apparaisse pas dans t .

On définit une relation binaire $\xrightarrow{\beta_0}$ sur $\Lambda \times \Lambda$ par induction sur un terme t :

1. Si $t \in \mathcal{V}$, $t \xrightarrow{\beta_0} t'$ est faux pour tout t' .
2. Si $t = \lambda x u$ alors $t \xrightarrow{\beta_0} t'$ ssi $t' = \lambda x u'$ avec $u \xrightarrow{\beta_0} u'$.
3. Si $t = (u)v$ alors $t \xrightarrow{\beta_0} t'$ ssi :
 - $t' = (u)v'$ avec $v \xrightarrow{\beta_0} v'$.
 - $t' = (u')v$ avec $u \xrightarrow{\beta_0} u'$.
 - $u = \lambda x w$ et $t' = w[v/x]$

La **β -réduction**, notée $\xrightarrow{\beta}$, est la plus petite relation binaire sur $\Lambda \times \Lambda$, réflexive, transitive et contenant $\xleftrightarrow{\beta_0}$. Et la **β -équivalence** est la plus petite relation d'équivalence qui contient $\xleftrightarrow{\beta}$.

De même on définit la relation binaire $\xrightarrow{\eta_0}$ sur $\Lambda \times \Lambda$ par induction sur un terme t :

1. Si $t \in \mathcal{V}$, $t \xleftrightarrow{\eta_0} t'$ est faux pour tout t' .
2. Si $t = \lambda x u$ alors $t \xleftrightarrow{\eta_0} t'$ ssi :
 - $t' = \lambda x u'$ avec $u \xleftrightarrow{\eta_0} u'$.
 - $u = (t')x$ avec x non libre dans t' .
3. Si $t = (u)v$ alors $t \xleftrightarrow{\beta_0} t'$ ssi :
 - $t' = (u)v'$ avec $v \xleftrightarrow{\eta_0} v'$.
 - $t' = (u')v$ avec $u \xleftrightarrow{\eta_0} u'$.

La **$\beta\eta$ -réduction**, notée $\xrightarrow{\beta\eta}$, est la plus petite relation binaire sur $\Lambda \times \Lambda$, réflexive, transitive et contenant $\xleftrightarrow{\beta\eta_0}$. Et la **$\beta\eta$ -équivalence** est la plus petite relation d'équivalence qui contient $\xleftrightarrow{\beta\eta}$.

Proposition 1.2.2 *Soient deux termes de Λ .*

M et N sont β -équivalents ssi $\lambda \vdash M = N$.

M et N sont $\beta\eta$ -équivalents ssi $\lambda + \eta \vdash M = N$

1.3 Préliminaire en théorie des domaines

Le premier modèle de λ (et de $\lambda + \eta$) différent du modèle de terme a été construit par Scott dans le cadre de la catégorie des domaines de Scott, et des fonctions continues [61, 62]. En fait la méthode proposée par Scott s'adapte à toute catégorie cartésienne close munie d'un objet réflexif, [8] ou [48].

Les catégories dans lesquels on se place sont toutes cartésiennes closes et ont pour objets des ordres partiels complets, auxquels, dans le cas fortement stable, on ajoute une structure qui est un ensemble de parties de l'ordre partiel.

Le but de cette section est de rappeler les différentes sortes d'ordres partiels utilisés ainsi que certaines de leurs propriétés.

Nous renvoyons à [29] pour de plus amples informations sur les ordres partiels.

Un **domaine** est un ensemble partiellement ordonné, (\mathcal{D}, \leq) , avec un plus petit élément, noté \perp . Deux éléments u, v de \mathcal{D} sont dits **compatibles** s'ils ont un majorant dans \mathcal{D} . Nous noterons respectivement $u \vee v$, $u \wedge v$, $\sqcup A$ et $\sqcap A$: le sup de u et v , l'inf de u et v , le sup du sous-ensemble A de \mathcal{D} , et l'inf de A , quand ils existent. Un sous-ensemble A de \mathcal{D} est **filtrant** s'il est non vide et si deux éléments quelconques de A sont majorés

par un élément de A . Un domaine est un **cpo**, i.e. un **ordre partiel complet**, si tout sous-ensemble filtrant de \mathcal{D} a une borne supérieure (on dira un sup).

La **topologie de Scott**, initialement introduite dans le cadre des treillis complets, [62], se généralise sans difficulté aux cpo [8].

Soit (\mathcal{D}, \leq) un cpo, la topologie de Scott sur \mathcal{D} est définie par :

- $O \subseteq \mathcal{D}$ est ouvert si :
- i) si $x \in O$ et $x \leq y$ alors $y \in O$
 - ii) $\sqcup X \in O$, avec $X \subseteq \mathcal{D}$ filtrant, alors $X \wedge O \neq \emptyset$

Les fonctions **continues** pour cette topologie sont les fonctions **croissantes** f de \mathcal{D} dans \mathcal{E} qui commutent aux sups filtrants, i.e $\forall A \subseteq \mathcal{D}$, A filtrant, $f(\sqcup A) = \sqcup f^\bullet(A)$.

Si f et g sont deux fonctions continues d'un cpo \mathcal{D} vers un cpo \mathcal{E} , on dit que f est plus petite extensionnellement que g , ce qui se note $f \leq_{ext} g$, si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq g(x)$.

Un élément u de \mathcal{D} est **compact** pour la topologie de Scott, si pour tout sous-ensemble filtrant A de \mathcal{D} on a : $u \leq \sqcup A \Rightarrow \exists v \in A, u \leq v$. Un élément u de \mathcal{D} est **premier** s'il vérifie la même propriété pour tout A dont le sup existe. Noter que \perp n'est pas premier (car $\perp = \sqcup \emptyset$). On notera \mathcal{D}_c (resp. \mathcal{D}_p) l'ensemble des éléments compacts (resp. premiers) de \mathcal{D} . Il est clair que tout élément premier est compact.

Posons $K(u) = \{h ; h \text{ est compact et } h \leq u\}$. On dit que \mathcal{D} est **algébrique** si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, $K(u)$ est filtrant et $u = \sqcup K(u)$. Un **domaine de Scott** est un domaine complet algébrique \mathcal{D} tel que tout sous ensemble majoré de \mathcal{D} possède un sup.

Le fait suivant se démontre facilement.

Fait 1.3.1 *Soit \mathcal{D} un domaine de Scott. Alors p est premier ssi p est compact et pour tout c_1 et c_2 compacts nous avons : $p \leq c_1 \vee c_2$ ssi $p \leq c_1$ ou $p \leq c_2$.*

Dans la suite les lettres h, k, l désigneront exclusivement des éléments compacts.

Le cadre des DI-domaines, qui sont des domaines de Scott munis de propriétés supplémentaires a été introduit par Berry [15] et permet de construire des modèles stables du λ -calcul.

Définition 1.3.2 *Un DI-domaine est un domaine \mathcal{D} tel que :*

- (i) tout sous-ensemble filtrant de \mathcal{D} admet une borne supérieure,
- (ii) tout sous-ensemble majoré de \mathcal{D} admet une borne supérieure,
- (iii) \mathcal{D} est algébrique,
- (iv) pour tout $h \in \mathcal{D}_c$, $\{u ; u \leq h\}$ est fini,
- (v) \mathcal{D} est distributif: pour tous $u, v, w \in \mathcal{D}$, si u, v sont compatibles, alors $(u \vee v) \wedge w = (u \wedge w) \vee (v \wedge w)$.

Les DI-domaines sont donc exactement les domaines de Scott qui vérifient les deux derniers points de la définition précédente.

Remarques

1. Si $h \in \mathcal{D}_c$ et $u \leq h$, alors $u \in \mathcal{D}_c$.
2. La condition (iii) implique : $u \leq v \Leftrightarrow \forall h (h \leq u \Rightarrow h \leq v)$.

Un exemple de DI-domaines particuliers est donné par les **domaines qualitatifs** (notés **QD**) introduit par Girard [30]. Ces domaines sont intéressants car on peut travailler uniquement avec leurs trames qui sont des objets plus simples à manipuler.

Un **domaine qualitatif** est un ensemble de parties \mathcal{D} non vide, clos par union filtrante et clos par sous ensemble. C'est un DI-domaine pour l'inclusion.

La **trame** de \mathcal{D} est l'ensemble $D = \bigcup \mathcal{D} = \{x/\{x\} \in \mathcal{D}\}$.

Les éléments finis de \mathcal{D} sont exactement les éléments de \mathcal{D} qui sont compacts pour la topologie de Scott de (\mathcal{D}, \subseteq) et les éléments premiers sont les singletons.

Enfin les **espaces cohérents**, ou domaines qualitatifs binaires, permettent de construire de façon simple des modèles stables du λ -calcul, dans lesquels on a une grande facilité du maniement des interprétations des termes.

Un domaine qualitatif \mathcal{D} de trame D est un espace cohérent s'il vérifie :

Pour tout $x \subseteq D$, si $\forall \alpha, \alpha' \in x, \{\alpha, \alpha'\} \in \mathcal{D}$ alors $x \in \mathcal{D}$.

Un espace cohérent est donc entièrement déterminé par la donnée d'une trame D et d'une relation réflexive et symétrique sur D . Une telle relation est appelé relation de cohérence et est notée \simeq .

Dans la suite on désignera les éléments d'un domaine \mathcal{D} par des lettres de l'alphabet romain a, b, \dots et les éléments de sa trame D , dans le cas où \mathcal{D} est un domaine qualitatif, par des lettres de l'alphabet grec α, β, \dots . Pour tout domaine \mathcal{D} on désignera les parties de ce domaine par des lettres romaines majuscules A, B, \dots .

1.4 Les λ -modèles réguliers

Dans ce qui suit \mathfrak{C} est une catégorie cartésienne close (c.c.c.) avec assez de points (cf. [8] ch. 5.5). Ses objets sont désignés par $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$ et l'ensemble des morphismes de \mathcal{D} dans \mathcal{E} par $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$.

Si \mathcal{D} est un cpo, l'ordre de \mathcal{D} est noté $\leq_{\mathcal{D}}$ (ou \leq) et son plus petit élément $\perp_{\mathcal{D}}$ (ou \perp).

Nous dirons que \mathfrak{C} est **régulière** si de plus :

- (i) les objets de \mathfrak{C} sont des cpo (éventuellement munis d'une structure supplémentaire) ;
- (ii) les éléments de $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ sont des fonctions continues de \mathcal{D} dans \mathcal{E} ;
- (iii) pour tous $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$, $f \leq_{\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}} g$ implique $\forall x \in \mathcal{D} f(x) \leq_{\mathcal{E}} g(x)$;
- (iv) pour tout sous-ensemble filtrant A de $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$, $\sqcup A$ coïncide avec le sup "point par point" de A : $\forall x \in \mathcal{D} (\sqcup A)(x) = \sqcup \{f(x) ; f \in A\}$.

Exemples Sont régulières : toutes les c.c.c. usuelles des sémantiques continue, stable et fortement stable ; les objets étant respectivement des cpo quelconques, des cpo particuliers (des DI-domaines), et des DI-domaines munis d'une cohérence acceptable ; et $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ est respectivement l'ensemble des fonctions continues de \mathcal{D} dans \mathcal{E} , l'ensemble des fonctions stables, et l'ensemble des fonctions fortement stables.

Définition 1.4.1 Un λ -modèle régulier est un objet réflexif d'une c.c.c. régulière \mathfrak{C} ; c'est-à-dire un triplet (\mathcal{D}, F, G) , où :
 \mathcal{D} est un objet de \mathfrak{C} , $F \in \mathcal{D} \Rightarrow [\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}]$ et $G \in [\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}] \Rightarrow \mathcal{D}$ sont des morphismes tels que $F \circ G = id$; si de plus $G \circ F = id$, on parlera de $\lambda\eta$ -modèle régulier, ou encore de modèle extensionnel.

En particulier les applications F et G sont continues et G est injective et réalise un isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}})$ et $(G(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}), \leq_{\mathcal{D}})$. Plus généralement, on peut définir, pour tout $n \geq 2$, un morphisme G^n de $\mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{D}$ dans \mathcal{D} , qui est de plus un isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(\mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{D}})$ et $(G^n(\mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{D}), \leq_{\mathcal{D}})$ par $G^n(f(x_1, \dots, x_n)) = G(a \rightsquigarrow G^{n-1}(f(a, x_2, \dots, x_n)))$.

En particulier tout modèle régulier (\mathcal{D}, F, G) est un modèle monotone, c'est à dire que : pour tous $u, v, w \in \mathcal{D}$ tels que $u, v \leq w$ on a $F(u)(v) \leq F(u)(w)$ et $F(u)(v) \leq F(w)(v)$.

Rappelons maintenant comment définir l'interprétation des λ -termes dans un λ -modèle régulier $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. On désigne par $\Lambda(\mathcal{D})$ l'ensemble des λ -termes à paramètres dans \mathcal{D} et par $\Lambda^0(\mathcal{D})$ le sous-ensemble des terme clos à paramètres.

Définition 1.4.2 On définit par induction sur $t = t[\bar{x}] \in \Lambda$ et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{D}^{l(\bar{x})}$, l'interprétation $t[\bar{a}/\bar{x}]^*$ dans \mathcal{D} du terme $t[\bar{a}/\bar{x}]$ de $\Lambda^0(\mathcal{D})$ par :

- si t est a , avec $a \in \mathcal{D}$, alors $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = a$;
- si t est x_i , alors $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = a_i$;
- si t est $(u[\bar{x}])v[\bar{x}]$, alors $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = F(u[\bar{a}/\bar{x}]^*)(v[\bar{a}/\bar{x}]^*)$;
- si t est $\lambda x u[y, \bar{x}]$, alors $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = G(b \rightsquigarrow u[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^*)$.

Il suit de ce que \mathfrak{C} est une c.c.c. que, pour tout $u \in \Lambda(\mathcal{D})$ et $\bar{x} \supseteq Vl(u)$, l'application $u_{\bar{x}}^* : \bar{a} \rightsquigarrow u[\bar{a}/\bar{x}]^*$ est dans $\mathcal{D}^{l(\bar{x})} \Rightarrow \mathcal{D}$. Pour $u \in \Lambda^0(\mathcal{D})$ on a $u_{\emptyset}^* = u^*$ (qui est un élément de \mathcal{D}). Compte tenu des isomorphismes qui correspondent, dans la c.c.c. \mathfrak{C} , aux opérations de Curryfication et de permutation des arguments des fonctions, et aux ajouts d'arguments inessentiels, on a de plus :

Lemme 1.4.3 Pour tous $u, v \in \Lambda(\mathcal{D})$ et $\bar{x} \supseteq Vl(u) \cup Vl(v)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_{\bar{x}}^* \leq v_{\bar{x}}^*$, où \leq désigne l'ordre de $\mathcal{D}^{l(\bar{x})} \Rightarrow \mathcal{D}$;
- (ii) $(\lambda \bar{x} u)^* \leq (\lambda \bar{x} v)^*$, où \leq désigne l'ordre de \mathcal{D} .

Et leur véracité est indépendante du choix de \bar{x} . Il en est de même avec l'égalité.

Nous noterons $\leq_{\mathcal{D}}$ et $=_{\mathcal{D}}$ les relations binaires induites sur $\Lambda(\mathcal{D})$ par \leq .

La proposition suivante est standard et précise en quoi le λ -calcul est modélisé.

Rappelons qu'une relation binaire r , sur Λ ou $\Lambda(C)$, **passé au contexte** si :

$(u, v) \in r$ ssi il existe un contexte $C[\]$ tel que $u = C[u']$, $v = C[v']$ avec $(u', v') \in r$.

Proposition 1.4.4

(i) La relation $\leq_{\mathcal{D}}$ est un préordre partiel sur $\Lambda(\mathcal{D})$ qui étend l'ordre de \mathcal{D} , et $=_{\mathcal{D}}$ est la relation d'équivalence associée.

(ii) Les deux relations sont closes par passage au contexte et contiennent la β -équivalence (la $\beta\eta$ -équivalence dans le cas extensionnel).

Notons $\mathcal{E}q$ l'ensemble des équations formelles entre termes clos. Nous appellerons **théorie de \mathcal{D}** , notée **$Th(\mathcal{D})$** , le sous-ensemble de $\mathcal{E}q$ correspondant aux équations satisfaites dans \mathcal{D} :

$$Th(\mathcal{D}) = \{u = v ; u, v \in \Lambda^0 \text{ et } u =_{\mathcal{D}} v\}.$$

Une λ -congruence (resp. $\lambda\eta$ -congruence) est une relation d'équivalence sur Λ qui contient la β -équivalence (resp. la $\beta\eta$ -équivalence), qui passe au contexte et qui *n'est pas la relation totale*. A toute congruence \sim , on associe canoniquement un sous-ensemble E_{\sim} de $\mathcal{E}q$, en posant :

$$E_{\sim} = \{u = v ; u, v \in \Lambda^0 \text{ et } u \sim v\}.$$

Une **λ -théorie** est un ensemble d'équations de la forme E_{\sim} . Si \sim est une $\lambda\eta$ -congruence, on dit que la théorie associée est extensionnelle.

Il est clair, d'après la proposition précédente, que la théorie d'un modèle est une λ -théorie, et que la théorie d'un modèle extensionnel est une λ -théorie extensionnelle.

D'autre part, si A est un sous-ensemble strict et non vide de Λ , clos par β -équivalence, alors l'ensemble T_A d'équations suivant :

$$T_A = \{u = v ; u, v \in \Lambda^0 \text{ et } \forall C[\], (C[u] \in A \Leftrightarrow C[v] \in A)\},$$

constitue une λ -théorie, qu'on appellera **la λ -théorie contextuelle induite par A** .

1.5 Stabilité sur les DI-domaines

Nous nous contenterons de rappeler une série de définitions et de faits bien connus sur les DI-domaines et les fonctions stables. Pour les démonstrations nous renvoyons le lecteur à [11, 12], ou à [30] qui traite le cas particulier des domaines qualitatifs.

Définition 1.5.1 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des DI-domaines et f une fonction continue de \mathcal{D} dans \mathcal{E} . On dit que f est **stable** si elle commute aux infs finis d'éléments compatibles, i.e si $\forall u, v \in \mathcal{D}$, $(u, v \text{ compatibles} \Rightarrow f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v))$.

Dans les DI-domaines, cette propriété de commutation aux infs binaires d'éléments compatibles est équivalente à la définition originale de Berry :

$$y \leq f(x) \Rightarrow \exists x' \leq x \text{ tel que } y \leq f(x') \text{ et } x' \text{ minimum pour cette propriété.}$$

Une fonction stable f de $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ dans \mathcal{E} est une fonction continue en chaque argument et qui vérifie :

$$f(a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2) = f(a_1, a_2) \wedge f(b_1, b_2),$$

si a_1, b_1 sont compatibles et a_2, b_2 sont compatibles.

A toute fonction stable f de \mathcal{D} dans \mathcal{E} on associe sa **trace**, notée $\mathbf{Tr}(f)$ et définie par :

$$\mathbf{Tr}(f) = \{(h, p) \in \mathcal{D}_c \times \mathcal{E}_p ; p \leq f(h), h \text{ minimal pour cette propriété}\}.$$

Cette trace est l'extension aux DI-domaines de celle définie par Girard dans le cadre des domaines qualitatifs [30]. Elle a été utilisée notamment par Bucciarelli et Ehrhard [21], et est plus petite que celle de Berardi [11].

Théorème 1.5.2 *Soit f une fonction stable de \mathcal{D} dans \mathcal{E} . Alors :*

1. f est caractérisée par sa trace et on a :

$$f(u) = \sqcup \{p ; \exists h \leq u, (h, p) \in \mathbf{Tr}(f)\}.$$

2. Un sous-ensemble $T \subseteq \mathcal{D}_c \times \mathcal{E}_p$ est la trace d'une fonction stable f^T ssi il vérifie :

- (i) h_1, \dots, h_n compatibles et $(h_1, p_1), \dots, (h_n, p_n) \in T$ implique p_1, \dots, p_n compatibles ;
- (ii) $(h, p) \in T$ et $p' \leq p$ implique $(h', p') \in T$ pour un certain $h' \leq h$;
- (iii) $(h, p), (h', p) \in T$ et h, h' compatibles implique $h = h'$.

Exemples 1. $\mathbf{Tr}(id) = \{(p, p) ; p \in \mathcal{D}_p\}$.

2. Soit $\epsilon_{h,k}$ la fonction de \mathcal{D} dans \mathcal{E} définie par :

$$\epsilon_{h,k}(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \geq h, \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\epsilon_{h,k}$ est stable et sa trace est : $\{(h, p') \in \mathcal{D}_c \times \mathcal{E}_p ; p' \leq k\}$.

On notera $[\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}]$ l'ensemble des fonctions stables de \mathcal{D} dans \mathcal{E} , et $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ l'ensemble des traces des fonctions stables de \mathcal{D} dans \mathcal{E} .

Théorème 1.5.3 *Le domaine $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}, \subseteq)$ est isomorphe, en tant que DI-domaine, à $([\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{E}], \leq_s)$, où \leq_s désigne l'ordre de Berry qui est défini par :*

$$f \leq_s g \text{ ssi } \forall u, v \in \mathcal{D}, (u \leq v \Rightarrow f(u) = f(v) \wedge g(u)).$$

Théorème 1.5.4 *La catégorie des DI-domaines et des fonctions stables est cartésienne close.*

Un cas particulier important

Dans le cas où \mathcal{E} est un domaine qualitatif de trame E , les éléments premiers p de \mathcal{E} sont de la forme $p = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in E$. Rappelons que l'ordre sur \mathcal{E} est l'inclusion. On utilise alors pour trace l'ensemble :

$$\mathbf{tr}(f) = \{(h, \alpha) \in \mathcal{D}_c \times E ; \alpha \in f(h) < \text{ et } h \text{ minimal pour cette propriété}\}$$

Dans ce cas l'ensemble des traces forme un QD de trame $\mathcal{D}_c \times E$. En particulier tout sous ensemble d'une trace est une trace (la condition (ii) du théorème 1.5.2 est vide). On a notamment le fait suivant :

Fait 1.5.5 Soient $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ un ensemble de fonctions stables de \mathcal{D} dans \mathcal{E} . Alors $tr(f_1) \cap \dots \cap tr(f_n)$ est la trace de $\sqcap F$ l'inf stable de f_1, \dots, f_n .

1.6 Les i -modèles continus

La classe des i -modèles continus contient tous les modèles standards (modèle \mathcal{D}_∞ de Scott, modèle d'Engeler, ect \dots).

D'une façon générale nous appellerons i -modèle du λ -calcul les modèles qui sont déterminés par une trame et par une application i de la trame de l'espace des traces de l'ensemble des fonctions représentables (ici les fonctions continues) du modèle dans la trame du modèle. Dans ces modèles on travaille avec les traces des fonctions au lieu des fonctions elle même ce qui rend aisé le calcul de l'interprétation des termes.

La construction des i -modèles continus a été donnée par Krivine [47]. Le cadre des i -modèles continus est celui des espaces de segments initiaux. Nous exposons dans la section suivante la construction des i -modèles stables et nous donnerons dans le chapitre suivant une construction de i -modèles fortement stables.

1.6.1 Les espaces de segments initiaux

Nous reprenons ici la présentation de [46] et nous y renvoyons pour les démonstrations. Soit D un ensemble préordonné dénombrable, le préordre étant noté \leq . Un segment initial de D est une partie S de D telle que : si $\alpha \in S$ et $\beta \leq \alpha$ alors $\beta \in S$. Pour $a \subseteq D$ on note $s(a)$ le plus petit segment initial contenant a , c'est à dire l'ensemble des minorants de a . On désigne par $\mathcal{D} = S(D)$ l'ensemble des segments initiaux de D , qui est un cpo pour l'inclusion. La trame de $S(D)$ est D .

Soient D, E deux ensembles préordonnés dénombrables. Si $f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{E}]$, on définit la **trace de f** , noté $tr(f)$, par :

$$tr(f) = \{(a, \alpha) \in D_f \times E; \alpha \in f(s(a))\}$$

Une fonction f est entièrement déterminée par sa trace :

$$f(u) = \{\beta \in E; \exists b \in D_f a \subseteq u (b, \beta) \in tr(f)\}.$$

On a alors le fait que l'application tr est un isomorphisme de $([\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{E}], \leq_{ext})$ vers $(S(D_f \times E), \leq_p)$ où \leq_p est l'ordre suivant : $(a, \alpha) \leq_p (b, \beta) \Leftrightarrow (s(b) \subseteq s(a) \wedge \alpha \leq \beta)$.

La proposition suivante exprime comment on relie cette notion de trace à la construction d'un λ -modèle régulier.

Soit D un ensemble préordonné dénombrable et i une application de $D_f \times D$ dans D . Posons :

$$F(a) = s(\{(h, \alpha); i(h, \alpha) \in a\}) \text{ pour tout } a \in \mathcal{D}$$

$$G(f) = s(\{i(h, \alpha); (h, \alpha) \in tr(f)\}) \text{ pout toute } f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]$$

On note $\mathcal{D}_{(D,i)}$ le triplet (\mathcal{D}, F, G) . La **paire** (D, i) constituée de la trame D et de l'application i est appelée la paire du modèle $\mathcal{D}_{(D,i)}$. La **trame de la paire** (D, i) est D .

Dans la suite nous parlerons de **paire totale** (D, i) lorsque i est une application totale de $D_f \times D$ vers D . Pour une paire (A, I) où A est un ensemble préordonné donné et I une application partielle de $A_f \times A$ vers A , on parlera de **paire partielle**.

Proposition 1.6.1 $\mathcal{D}_{(D,i)}$ est un λ -modèle régulier ssi :

$$i(h, \alpha) \leq i(k, \beta) \Rightarrow (h, \alpha) \leq_p (k, \beta) \text{ pour tous } (h, \alpha), (k, \beta) \in \mathcal{D}_f \times D.$$

$\mathcal{D}_{(D,i)}$ est extensionnel ssi :

1. $i(h, \alpha) \leq i(k, \beta) \Leftrightarrow (h, \alpha) \leq_p (k, \beta)$.

2. Pour tout $\gamma \in D$, il existe $(h, \alpha) \in \mathcal{D}_f \times D$ tel que $\gamma \leq i(h, \alpha) \leq \gamma$.

Si le préordre sur D vérifie la première condition on dit que D est muni d'un **β -préordre**. S'il vérifie les deux dernières conditions on dit que D est muni d'un **préordre extensionnel**. Si i est surjective la deuxième condition pour que le préordre de D soit un préordre extensionnel est satisfaite.

Dans un modèle $\mathcal{D}_{(D,i)}$ extensionnel on a :

$$F(a)(b) = \{\alpha; \exists h \subseteq b \ i(h, \alpha) \in a\} \text{ } a, b \text{ étant des éléments de } \mathcal{D}$$

$$G(f) = \{i(a, \alpha); \alpha \in f(s(a))\} \text{ } f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]$$

On note parfois $F(a)(b)$ simplement par $(a)b$.

Dans [46],p.106, il est montré que si nous avons un ensemble préordonné dénombrable et une bijection i de $D_f \times D$ dans D on peut alors munir D d'un préordre extensionnel.

Un cas particulier : Les modèles de graphes.

Cette classe de modèle ne contient que des modèles non extensionnels, comme le modèle d'Engeler et le modèle \mathcal{P}_w de Plotkin et Scott.

On considère ici la trame D munie du préordre trivial, noté \leq . On a, pour $\alpha, \beta \in D$, $\alpha \leq \beta$ ssi $\alpha = \beta$. Le préordre induit sur D_f est $a \leq b$ ssi $a \subseteq b$. Il en résulte que $s(a) = a$ pour tout $a \in D_f$ et $S(D) = \mathcal{P}(D)$.

On considère alors une injection quelconque i de $D_f \times D$ vers D . Il est facile de vérifier que la première condition de la proposition 1.6.1 est vérifiée et donc que $\mathcal{D}_{(D,i)}$ est un λ -modèle. De plus on vérifie également facilement que ce modèle n'est pas extensionnel.

Remarquons qu'ici on a :

$$F(a)(b) = \{\alpha; \exists h \subseteq b \ i(h, \alpha) \in a\} \text{ } a, b \text{ étant des éléments de } \mathcal{D} ;$$

$$\text{Et } G(f) = \{i(a, \alpha); \alpha \in f(a)\} \text{ } f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}] .$$

1.6.2 Modèles construits sur un ensemble d'atomes

Nous exposons ici une généralisation de la construction de Krivine présentée dans [44] où l'on définit la notion de **complétion** d'une paire partielle (A, I) . Le but de cette complétion est d'étendre une paire partielle (A, I) en une paire (D, i) telle que la paire partielle (A, I) soit une **restriction** de la paire (D, i) , dans le sens où $A \subseteq D$, $i^{-1}(A) \subseteq A_f \times A$ et $I = i_{/i^{-1}(A)}$.

Soit (A, I) une paire partielle telle que $Im(I)$ ne contienne pas de couple. On appelle l'ensemble A l'**ensemble des atomes**. La complétion de (A, I) est la paire (D, i) définie par :

$$D_0 = A; D_{n+1} = D_n \cup (D_{nf} \times D_n \setminus Dom(I)) ; D = \bigcup_{n \geq 0} D_n.$$

Et l'injection i est définie par :

$$i(a, \alpha) = \begin{cases} I(a, \alpha) & (a, \alpha) \notin Dom(I) , \\ (a, \alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La paire (D, i) est la **complétion canonique** de la paire partielle (A, I) . On note parfois $(\overline{A}, \overline{I}) = (\overline{A}, \overline{I})$ la complétion canonique d'une paire partielle (A, I) . La paire $(\overline{A}, \overline{I})$ est aussi appelée l'**extension** de (A, I) .

Exemples :

- le **modèle d'Engeler** construit sur l'ensemble A est le modèle engendré par la paire (D, i) qui est la complétion canonique de la paire partielle (A, I) où I est l'application vide.
On munit la trame D ainsi obtenu du préordre trivial qui est un β -préordre mais pas un préordre extensionnel. On obtient le modèle non extensionnel $(\mathcal{P}(D), F, G)$.
- Les **modèles de Scott** sont obtenus en prenant A quelconque muni d'un préordre \leq et I donnée par $I(\emptyset, \alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Dans ce cas n'importe quel préordre de A peut s'étendre en un préordre extensionnel sur D . On construit ce préordre par induction sur le rang : si $\alpha, \beta \in A$ alors $\alpha \leq \beta$ est déjà défini ; si $rg(\alpha) + rg(\beta) \geq 1$ on a $\alpha = h \rightarrow \alpha_0$ et $\beta = k \rightarrow \beta_0$ et on pose $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\alpha_0 \leq \beta_0 \wedge s(h) \subseteq s(k))$.
- Les **modèle de Park** [55] sont obtenus de la même manière que les modèles de Scott mais en considérant maintenant l'injection partielle I donnée par $I(\{\alpha\}, \alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Dans ce cas on est obligé de considérer A muni du préordre trivial si l'on veut munit D d'un préordre extensionnel étendant celui de A .

Nous donnerons en détail dans le chapitre suivant les constructions des analogues fortement stables des modèles de Scott et des modèles de Park. On verra que cette même technique peut être employé dans le cadre des paires partielles hypercohérentes.

1.7 Les i -modèles stables

Nous présentons maintenant brièvement la classe des i -modèles stables. La notion de i -modèle stable a été introduite indépendamment par Krivine dans [46] et par Honsell et Ronchi dans [36].

Nous renvoyons également à [32] et [44] pour tous les détails concernant la construction des i -modèles stables.

Nous choisissons ici, pour des raisons d'analogie avec le cadre des hypercohérences, de présenter cette classe de modèle suivant le formalisme, introduit par Girard [30], des espaces cohérents.

Soit D un ensemble dénombrable muni d'une relation binaire réflexive et symétrique, noté \simeq , et appelée **relation de cohérence**.

Une partie a de D est **cohérente** si tous les éléments de a sont, deux à deux, dans la relation de cohérence.

On note \mathcal{D}_c l'ensemble des parties finies et cohérentes de D .

L'espace cohérent \mathcal{D} construit sur (D, \simeq) est l'espace des parties cohérentes de D . L'ensemble D est appelé la trame de \mathcal{D} .

On dit que deux éléments de \mathcal{D} sont **compatibles** si l'ensemble constitué de ces deux éléments est cohérent.

Définition 1.7.1 Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux espaces cohérents. Alors $\mathcal{D}_1 \Rightarrow \mathcal{D}_2$ est un espace cohérent de trame $\mathcal{D}_{1c} \times \mathcal{D}_2$ et ayant pour relation de cohérence la relation \simeq_p définie par :

$$(h, \alpha) \simeq_p (k, \beta) \text{ si et seulement si } \begin{cases} h, k \text{ compatibles} \Rightarrow \alpha \simeq \beta \\ h, k \text{ compatibles et distincts} \Rightarrow \alpha \simeq \beta \wedge \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Définition 1.7.2 Soient (D_1, \simeq_1) et (D_2, \simeq_2) deux espaces cohérents. Une injection i de D_1 dans D_2 est un **morphisme d'espace cohérent** si et seulement si, pour $\alpha, \beta \in D_1$, $i(\alpha) \simeq_2 i(\beta) \Leftrightarrow \alpha \simeq_1 \beta$.

Soient \mathcal{D} un espace cohérent engendré par (D, \simeq) et i un morphisme d'espace cohérent de $\mathcal{D}_c \times D$ dans D , pour la relation de cohérence \simeq_p donné précédemment.

Posons :

$$F(a) = \{(h, \alpha); i(h, \alpha) \in a\} \text{ pour tout } a \in \mathcal{D}$$

$$G(f) = \{i(h, \alpha); (h, \alpha) \in tr(f)\} \text{ pour toute } f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]$$

Alors le triplet (\mathcal{D}, F, G) est un **i -modèle stable**, que l'on note $\mathcal{D}_{(\simeq, i)}$.

La paire $((D, \simeq), i)$ est appelée **paire cohérente**.

Remarquons que $\mathcal{D}_{(\simeq, i)}$ est extensionnel si et seulement si i est un isomorphisme d'espace cohérent.

Nous ne rappelons pas ici la construction de modèle stable construit sur un ensemble d'atomes, nous renvoyons à [47, 44] pour une construction de tels modèles utilisant la notion d'antichaine et [39, 32] pour une présentation utilisant la notion d'espace cohérent.

Chapter 2

Modèles fortement stables

Le but de ce chapitre est de présenter la sémantique fortement stable, motivations comprises, et de donner un cadre permettant de manipuler de façon relativement aisée certains modèles fortement stables du lambda-calcul pur.

La notion de forte stabilité a été introduite par Bucciarelli et Ehrhard dans [19]. On renvoie à l'introduction et à [20, 18, 21, 27] pour les liens existant entre la notion de forte stabilité et la séquentialité.

Le cadre le plus général dans lequel la forte stabilité a été définie est celui des DI-domaines avec cohérence (DIC), voir [20]. On peut construire des modèles du lambda-calcul pur dans ce cadre général mais ils sont obtenus comme limite inverse et sont très lourds à manipuler, notamment en ce qui concerne les interprétations de termes, et ceci même pour les analogues fortement stables de modèles “simples” comme \mathcal{D}_∞ ou le modèle de Park.

De plus ce cadre général comporte un important défaut : la cohérence est très peu reliée au domaine. Pratiquement, il en résulte un manque d'information sur le type de fonctions qui seront fortement stables.

Si on se donne un DI-domaine \mathcal{D} , on peut le munir d'une cohérence \mathcal{C} , c'est à dire d'un ensemble de parties de \mathcal{D} . Si on veut obtenir un objet réflexif, la cohérence doit vérifier certaines propriétés de clôtures, on dit alors que la cohérence est acceptable.

Une fonction fortement stable de $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1)$ vers $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}_2)$ est une fonction continue qui préserve les cohérences et qui commute aux infs de parties cohérentes.

Quelles sont les fonctions qui sont fortement stables?

Immédiatement on remarque que se poser cette question revient à se demander quelles sont les cohérences que l'on considère. On a une liberté assez grande sur les cohérences et cette liberté peut s'avérer négative.

Considérons un exemple particulier. Soit $\mathcal{B} = \{\perp, V, F\}$ l'ensemble des Booléens. C'est un DI-domaine que l'on peut munir de trois cohérences acceptables :

$\mathcal{C}_1 = \mathcal{P}_f^*(\mathcal{B})$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{P}_f^*(\mathcal{B}) \setminus \{V, F\}$ et $\mathcal{C}_3 = \mathcal{P}_f^*(\mathcal{B}) \setminus \{\{V, F\}, \{\perp, V, F\}\}$.

On obtient trois DIC : $(\mathcal{B}, \mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C}_3)$.

Considérons la fonction de Berry g_T de \mathcal{B}^3 dans \mathcal{B} définie par :

$$g_T(x, y, z) = \begin{cases} V & \text{si } (x, y, z) \geq (\perp, V, F) \text{ ou } (F, \perp, V) \text{ ou } (V, F, \perp), \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est connu que cette fonction n'est pas séquentielle et pourtant elle est fortement stable si on considère \mathcal{B} muni de la cohérence \mathcal{C}_3 , voir l'exemple de la page 43.

Par contre la fonction de \mathcal{B} dans \mathcal{B} , définie par : $f(x) = V$ ssi $x = V$ ou $x = F$ est séquentielle et n'est pas fortement stable si on considère \mathcal{B} muni de la cohérence \mathcal{C}_1 , voir l'exemple de la page 43.

Le phénomène est grandement accentué dans le cadre des modèles du Lambda-calcul pur, bien qu'ici la notion de séquentialité n'a plus de sens. Si on se donne de façon très générale un objet réflexif $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ de la catégorie des DIC et des fonctions fortement stables, quelles sont les fonctions fortement stables dans ce modèle?

Les seules fonctions dont on est sûr qu'elles soient fortement stables dans ce cadre sont les fonctions constantes et les fonctions en estrade, c'est à dire les fonctions du type

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \geq c \\ b & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } c \text{ compact et } b \leq a.$$

Dès que l'on considère des fonctions plus compliquées on ne peut plus rien dire, il faut alors quitter le cadre général et considérer des cas particuliers.

Ce manque d'information est un frein à certains raisonnements que l'on voudrait faire de façon générale (voir la section de ce chapitre sur les rétractions universelle et le chapitre quatre).

Bucciarelli dans [18], propose une notion plus restrictive de cohérences. Il munit un DI-domaine \mathcal{D} d'une cohérence acceptable et qui vérifie de plus certaines autres propriétés. Ces cohérences sont appelées des cohérences "strong and prime algebraic". On obtient ainsi une c.c.c.

On a alors des DIC où la cohérence est complètement décrite par sa restriction aux éléments premiers des DI-domaines (la cohérence est "prime algebraic") et de plus la cohérence est reliée étroitement à l'ordre du domaine qui lui est associé (la cohérence est "strong").

Avec ces objets on élimine le phénomène décrit dans le cas des Booléens. En effet \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 ne sont pas "strong and prime algebraic" alors que \mathcal{C}_2 l'est. Et toutes les fonctions de $(\mathcal{B}^n, \mathcal{C}_2^n)$ vers $(\mathcal{B}, \mathcal{C}_2)$ fortement stables sont séquentielles (voir [19]).

Le défaut de cette nouvelle classe d'objets est la lourdeur des contraintes imposées aux cohérences, il en résulte un manque de maniabilité évident.

Ehrhard a donné un moyen élégant de palier à ce défaut tout en conservant les bonnes propriétés sur les cohérences en introduisant une notion particulièrement bien adaptée à la forte stablité : les hypercohérences [26].

Une hypercohérence H est un couple (D, \cdot) où D est un ensemble et \cdot est un ensemble de parties finies et non vides de D , avec une seule contrainte, celle de contenir tous les singletons.

D'une hypercohérence H on déduit $(\mathcal{D}(H), \mathcal{C}(H))$ un DI-domaine avec cohérence acceptable "strong and prime algebraic". L'intérêt des hypercohérences, qui sont des objets plus simples à manipuler, est qu'elles permettent de reconstruire l'empilement de structures que constitue un DIC uniquement à partir d'une trame.

Dans [26] il est montré que la catégorie des hypercohérences et des fonctions fortement

stables est une c.c.c.

En ce qui concerne le λ -calcul non typé on se propose ici de construire des i -modèles fortement stables dans le cadre des hypercohérences (section 2.6-2.8). On donne une présentation de cette classe de modèle qui évite toute mention directe de notions catégoriques et qui les rend directement exploitables.

Les applications que l'on donne sont les suivantes :

1. On construit en détail dans ce cadre les analogues fortement stables de \mathcal{D}_∞ et du modèle de Park (section 2.10).
2. Nous montrons dans la sections 2.11 que tous les i -modèles fortement stables contiennent une infinité de rétractions universelles. Autrement dit ils sont tous des modèles de la théorie RU_∞ introduite dans [31].
3. Dans le chapitre suivant on montrera comment une bonne connaissance du modèle de Park fortement stable permet de donner une démonstration purement sémantique de l'incomplétude de la classe des modèles stables et de celle des modèles continus. Il est à remarquer que le fait de pouvoir utiliser les i -modèles fortement stables joue un rôle important pour établir ces résultats d'incomplétude de façon sémantique.

2.1 Notations et définitions

On fixe ici la terminologie et on donne quelques définitions ensemblistes.

- Soient A, B_1, \dots, B_n des ensembles. Si on a $A \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ on notera, pour tout $i \leq n$, $(A)_i$ la i ème projection de A . Si $X \subseteq \mathcal{P}(B_1 \times \dots \times B_n)$ on note également $(A)_i$ l'ensemble $\{(a)_i; a \in X\}$. On dit que A est un **recouvrement** de B_1, \dots, B_n si, pour tout $i \leq n$, $(A)_i = B_i$.
- Soient A_1, \dots, A_n des ensembles. On note $A_1 + \dots + A_n$ l'union disjointe de ces ensembles : $A_1 + \dots + A_n = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}) \cup \dots \cup (A_n \times \{n\})$.
 1. Si $C \subseteq A_1 + \dots + A_n$ on note, pour $i \leq n$, $p_i(C) = \{a \in A_i; (a, i) \in C\}$.
 2. Si $C \subseteq A_i$, on note $\pi_i(C) = \{(a, i); a \in C\}$.
- Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, et $A, B \subseteq E$. Nous dirons que A est plus petit que B pour l'ordre **Egli-Milner**, ce qui est noté $A \sqsubseteq B$, si :
 1. $\forall a \in A \exists b \in B a \leq b$;
 2. $\forall b \in B \exists a \in A a \leq b$.
- Soit A un ensemble de parties. Nous dirons que u est une **multisection** de A , noté $u \triangleleft A$, si :

1. $u \subseteq \cup A$
2. $\forall a \in A \ u \cap a \neq \emptyset$

Noter qu'une multisection est toujours non vide. Nous écrivons $u \triangleleft_f A$ pour indiquer que u est une multisection finie de A (ce qui ne peut se produire que si A est fini).

- $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ est **héréditaire** s'il est clos par sous ensemble non vide :
 $\forall y \in Y \ \forall x \subseteq y \ (x \neq \emptyset \Rightarrow x \in Y)$.
- $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ est **binaire** si $\forall y \subseteq X \ (y \in Y \Leftrightarrow \forall x, x' \in y \ \{x, x'\} \in Y)$.

2.2 Modèles fonctionnels du λ -calcul

Nous rappelons la définition de β -modèles fonctionnels proposée dans [47].

Si \mathcal{D} est un ensemble, $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ désignera l'ensemble des applications de $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ dans \mathcal{D} qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées.

On désignera par c_i la i^{eme} fonction coordonnée, c'est à dire la i^{eme} projection de $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ sur \mathcal{D} ; pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, $\bar{d} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, un entier i , $f_{i, \bar{d}}$ désignera l'application de \mathcal{D} dans \mathcal{D} défini par : $x \mapsto f(d_1, \dots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \dots)$.

On adoptera la même notation pour $\bar{d} \in \mathcal{D}^n$ et $i \leq n$ si f ne dépend que de ses n premières coordonnées, ou si f est une fonction de \mathcal{D}^n dans \mathcal{D} .

Définition 2.2.1 1. Un **modèle fonctionnel** est la donnée de $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{F}^\infty, \Phi, \Psi)$ où :

- (a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{D})$.
 - (b) Φ est une application de $\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{F}$ et Ψ est une application de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{D}$.
 - (c) \mathcal{F}^∞ contient toutes les c_i
 - (d) \mathcal{F} contient toutes les $f_{i, \bar{d}}$, où $f \in \mathcal{F}^\infty$, $i \in \mathbb{N}$, $\bar{d} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$.
 - (e) Pour tous $f, g \in \mathcal{F}^\infty$, la fonction $\bar{d} \mapsto \Phi(f(\bar{d}), g(\bar{d}))$ est dans \mathcal{F}^∞ .
 - (f) Pour tous $f \in \mathcal{F}^\infty$, $i \in \mathbb{N}$, la fonction $\bar{d} \mapsto \Psi(f_{i, \bar{d}})$ est dans \mathcal{F}^∞ .
2. Un **β -modèle fonctionnel** est un modèle fonctionnel tel que : $\Phi \circ \Psi$ est l'identité sur \mathcal{F} .
 3. un **$\beta\eta$ -modèle fonctionnel** est un β -modèle fonctionnel tel que de plus $\Psi \circ \Phi$ est l'identité sur \mathcal{D} .

Notations :

- Pour $a, b \in \mathcal{D}$ $(a)b = \Phi(a)(b)$.
- Pour $f, g \in \mathcal{F}^\infty$ $(f)g$ est la fonction définie en (e).
- Pour $f \in \mathcal{F}$ $\lambda x f(x) = \Psi(f)$.

- Pour $f \in \mathcal{F}^\infty$, $i \in \mathbb{N}$, $\lambda x_i f$ est la fonction définie en (f) .

On définit une **interprétation** de l'ensemble des termes du lambda calcul dans \mathcal{F}^∞ ; t^* est définie par induction sur la complexité du terme t . On suppose que les variables du λ -calcul sont x_1, \dots, x_n, \dots :

Si t est la variable x_i , alors t^* est la fonction coordonnée c_i

Si $t = (u)v$ alors $t^* = (u^*)v^*$

Si $t = \lambda x_i u$ alors $t^* = \lambda x_i u^*$.

Si t, u sont deux termes β -équivalents (resp. $\beta\eta$ -équivalents) alors $t^* = u^*$ dans tout β -modèle (resp. dans tout $\beta\eta$ -modèle). (Voir [47])

2.3 DI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables

La stabilité forte, due à Bucciarelli et Ehrhard, se définit dans le cadre des DI-domaines par une propriété de préservation d'infis d'éléments non nécessairement majorés : les infis de parties **cohérentes**. Nous nous contenterons ici d'énoncer les définitions et les principaux résultats sans démonstrations (cf. [21], ou [19] qui traite le cas particulier des domaines qualitatifs).

Une **cohérence** sur un DI-domaine \mathcal{D} est un sous-ensemble \mathcal{C} de $\mathcal{P}_f^*(\mathcal{D})$, c'est-à-dire un ensemble non vide de parties finies de \mathcal{D} . La **cohérence canonique** de \mathcal{D} est $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq_f^* \mathcal{D} ; \sqcup A \text{ existe}\}$. Un **DI-domaine avec cohérence (DIC)** est un couple $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, où \mathcal{D} est un DI-domaine et où \mathcal{C} est une cohérence sur \mathcal{D} .

Définition 2.3.1 Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}_2)$ deux DI-domaines avec cohérence.

Une fonction **continue** f , de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 , est **fortement stable** relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 si elle vérifie :

- (i) $\forall A \in \mathcal{C}_1 f^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$;
- (ii) $\forall A \in \mathcal{C}_1 f(\sqcap A) = \sqcap f^\bullet(A)$.

Remarque :

Comme toute fonction continue est croissante la troisième condition est assurée dès que l'on a, pour tout $A \in \mathcal{C}_1$, $\sqcap f^\bullet(A) \subseteq f(\sqcap A)$.

La proposition suivante fait le lien entre les fonctions fortement stables et les fonctions stables.

Proposition 2.3.2 Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}_2)$ deux DI-domaines avec cohérences.

1. Si $\mathcal{C}_{\mathcal{D}_1} \subseteq \mathcal{C}_1$ et si f de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 est fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 alors elle est stable.
2. Si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{D}_1}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{D}_2} \subseteq \mathcal{C}_2$ alors f de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 est stable ssi f est fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Preuve

1. Évident.
2. Soit $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}_1}$ alors $\sqcup A$ existe dans \mathcal{D}_1 et f étant monotone, pour tout $a \in A$, $f(a) \leq f(\sqcup A)$. Ainsi l'ensemble $f^\bullet(A)$ est majoré dans \mathcal{D}_2 par $f(\sqcup A)$ et, puisque \mathcal{D}_2 est un DI-domaine, $\sqcup f^\bullet(A)$ existe dans \mathcal{D}_2 , ce qui nous dit que $f^\bullet(A) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}_2} \subseteq \mathcal{C}_2$.
Par définition de la stabilité, si $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}_1}$ alors $f(\sqcap A) = \sqcap f^\bullet(A)$.
L'autre sens est donné par le premier point.

□

Toutes les cohérences considérées par la suite contiendront la cohérence canonique, et donc, toutes les fonctions fortement stables rencontrées seront stables. Par définition, la trace d'une fonction fortement stable est alors sa **trace** en tant que fonction stable.

Définition 2.3.3 Une cohérence \mathcal{C} sur un DI-domaine \mathcal{D} est **acceptable** si elle vérifie :

- (i) $a \in \mathcal{D}$ implique $\{a\} \in \mathcal{C}$;
- (ii) si $A \in \mathcal{C}$ et $B \sqsubseteq A$, alors $B \in \mathcal{C}$ (\sqsubseteq désigne l'ordre Egli-Milner) ;
- (iii) si X_1, \dots, X_n des sous-ensembles filtrants de \mathcal{D} sont tels que, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}$, alors $\{\sqcup X_1, \dots, \sqcup X_n\} \in \mathcal{C}$.

Les cohérences acceptables sur \mathcal{D} constituent le plus grand ensemble de cohérences qui rend la fonction d'évaluation fortement stable.

On montre facilement que la cohérence canonique est la plus petite des cohérences acceptables.

Théorème 2.3.4 [21] La catégorie des DI-domaines avec cohérence acceptable et des fonctions fortement stables est cartésienne close.

Remarque Dans cette catégorie, le produit cartésien de $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}(\mathcal{D}_1))$ et $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}(\mathcal{D}_2))$, noté $(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2, \mathcal{C}(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2))$, est défini par :

- $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ est le produit usuel,
- $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2) = \{C \subseteq \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 ; (C)_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_1) \text{ et } (C)_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_2)\}$.

En particulier le produit des cohérences canoniques est la cohérence canonique du produit.

Exemples 1. Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{D}_2, \mathcal{C}_2)$ deux DI-domaines avec cohérence acceptable et $a, b \in \mathcal{D}_2$ tels que $b \leq a$.

La **fonction en estrade** g de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 définie par :

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \geq h, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

est fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

En effet, cette fonction est continue, puisque stable. Il reste à vérifier que si on a

$A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}_1$, alors $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$ et $\sqcap g^\bullet(A) = g(\sqcap A)$.

Il y a trois valeurs possibles pour $g^\bullet(A)$: $\{b\}$, $\{b, a\}$ ou $\{a\}$. Ces trois ensembles sont plus petits, pour l'ordre Egli-Milner, que $\{a\}$. Comme \mathcal{C}_2 est acceptable, on en déduit qu'ils sont dans \mathcal{C}_2 .

Si $\sqcap g^\bullet(A) = a$, alors pour tout $i \leq n$, $a_i \geq h$, et donc $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \geq h$, ce qui entraîne que $g(\sqcap A) = a$.

Si $\sqcap g^\bullet(A) = b$, alors il existe $j \leq n$ tel que $a_j \not\geq h$, et donc $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \not\geq h$, ce qui entraîne que $g(\sqcap A) = b$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{\perp, V, F\}$ le domaine plat des booléens. Ce DI-domaine admet trois cohérences acceptables : la cohérence canonique, $\mathcal{P}_f^*(\mathcal{B})$, et la cohérence $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ constituée de toutes les parties non vides de \mathcal{B} excepté $\{V, F\}$. Considérons maintenant la fonction de Berry g_T de \mathcal{B}^3 dans \mathcal{B} définie par :

$$g_T(x, y, z) = \begin{cases} V & \text{si } (x, y, z) \geq (\perp, V, F) \text{ ou } (F, \perp, V) \text{ ou } (V, F, \perp), \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est bien connu que g_T est stable. D'après la proposition 2.3.2, elle est donc fortement stable relativement à la cohérence canonique.

Par contre g_T n'est pas fortement stable de $(\mathcal{B}^3, \mathcal{C}(\mathcal{B}^3))$ vers $(\mathcal{B}, \mathcal{C}(\mathcal{B}))$:

L'ensemble $A = \{(\perp, V, F), (F, \perp, V), (V, F, \perp)\}$ est dans $\mathcal{C}(\mathcal{B}^3)$ car, pour tout $1 \leq i \leq 3$, $(A)_i = \{\perp, V, F\} \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$. Or $g_T(\sqcap A) = g_T(\perp, \perp, \perp) = \perp \neq \sqcap g_T^\bullet(A) = V$.

Par le même argument, g_T n'est pas fortement stable relativement à $\mathcal{P}_f^*(\mathcal{B})$.

3. Soit f la fonction de \mathcal{B} dans \mathcal{B} définie par : $f(x) = V$ ssi $x = V$ ou $x = F$. Si on prend $\mathcal{P}_f^*(\mathcal{B})$ comme cohérence, la fonction f n'est pas fortement stable (car elle ne préserve pas l'inf de $\{V, F\}$). Par contre, on montre facilement qu'elle l'est relativement à $\mathcal{C}(\mathcal{B})$.

La suite de ce chapitre se place dans le cadre plus restreint des **domaines qualitatifs avec cohérence acceptable (QDC)**. Ce cadre, qui fournit encore une c.c.c., suffit pour construire tous les modèles usuels et notamment les i -modèles fortement stables.

Notations :

Dans toute la suite de ce chapitre on ne considère que des domaines qualitatifs avec cohérence acceptable. Les symboles \mathcal{D} désigneront toujours un domaine qualitatif avec cohérence acceptable celles-ci étant toujours désignées par les symboles \mathcal{C} .

2.4 Traces

La notion de trace étant centrale on rappelle ici quelques définitions et propriétés élémentaires les concernant.

La définition de la trace d'une fonction fortement stable d'un QDC dans un autre est exactement celle donnée par la trace d'une fonction stable d'un QDC dans un autre (on rappelle que dans un QDC l'ordre est l'inclusion).

Définition 2.4.1 La trace d'une fonction fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 est sa trace en tant que fonction stable à savoir le sous ensemble de $\mathcal{D}_{1f} \times \mathcal{D}_2$, noté $\mathbf{tr} f$:

$$\mathbf{tr} f = \{(b, \beta) \in \mathcal{D}_{1f} \times \mathcal{D}_2; \beta \in f(b) \text{ et } \beta \notin f(b') \text{ pour tout } b' \subsetneq b\}.$$

Remarquons que l'on a $f(u) = \{\alpha ; \exists h \subseteq u, (h, \alpha) \in \text{Tr}(f)\}$.

On note \mathbf{f}^t la fonction de trace t .

Nous désignerons par $[\mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$ l'ensemble des fonctions fortement stables de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 et par $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ l'ensemble de leurs traces.

Définition 2.4.2 Soient deux fonctions f et g de $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$. On dit que f est inférieure à g pour l'ordre stable (ou ordre de Berry), ce qui se note $\mathbf{f} \leq_s \mathbf{g}$, si :

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_1 \text{ tels que } x \subseteq y \text{ on a } f(x) = f(y) \cap g(x).$$

Proposition 2.4.3 Soient f et g deux fonctions de $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$. Alors $\mathbf{f} \leq_s \mathbf{g}$ si et seulement si $\mathbf{tr} f \subseteq \mathbf{tr} g$.

Preuve : C'est en effet vrai pour toutes les fonctions stables. Voir [30].

Les deux lemmes suivant nous disent que l'application \mathbf{tr} de $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$ vers $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ est continue et qu'elle commute à tous les infis finis.

Lemme 2.4.4 Soit $F \subseteq [\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$ filtrant pour \leq_s . Alors, le sup de F pour l'ordre stable, $\bigsqcup F$, est une fonction fortement stable de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

$$\text{Et } \mathbf{tr}(\bigsqcup F) = \bigcup_{f \in F} \mathbf{tr}(f).$$

Preuve On sait que $\bigsqcup F$ est une fonction stable, que $\bigsqcup F(a) = \bigcup_{f \in F} f(a)$ et que la trace

du sup est le sup des traces, (voir [15] ou [30])

Vérifions que $\bigsqcup F$ est une fonction fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}_1$ et $g = \bigsqcup F$.

Montrons que $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$.

Par définition $g^\bullet(A) = \{g(a_1), \dots, g(a_n)\} = \{\bigcup B_1, \dots, \bigcup B_n\}$ où, pour tout $i \leq n$, $B_i = \{f(a_i); f \in F\}$. Il est clair que les B_i sont des sous ensembles filtrants de \mathcal{D}_2 ; pour montrer que $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$ il suffit donc de montrer que, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n$, $\{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{C}_2$.

Soit $(b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n$. Alors $\{b_1, \dots, b_n\} = \{f_1(a_1), \dots, f_n(a_n)\}$ avec f_1, \dots, f_n dans F filtrant, donc il existe $f \in F$ telle que $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = f^\bullet(A)$. Comme f est fortement stable, $f^\bullet(A)$ est dans \mathcal{C}_2 et donc $\{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{C}_2$.

Montrons que $g(\bigcap A) \supseteq \bigcap g(A)$.

Soit $\alpha \in g(a_1) \cap \dots \cap g(a_n)$. Pour $i \leq n$ il y a $f_{a_i} \in F$ tel que $\alpha \in f_{a_i}(a_i)$; or F est filtrant, donc il existe $f \in F$ tel que $\alpha \in f(a_1), \dots, \alpha \in f(a_n)$. Ainsi $\alpha \in \bigcap f^\bullet(A) \subseteq \bigcap g^\bullet(A)$.

□.

Lemme 2.4.5 *Soit $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ un ensemble fini et non vide de fonctions de $[\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2]_{FS}$. Alors, la fonction $\sqcap F$ est la fonction fortement stable de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 ayant pour trace $tr(f_1) \cap \dots \cap tr(f_n)$.*

Preuve On a rappelé dans le fait 1.5.5 que, dans le cas des domaines qualitatifs, $\sqcap F$, l'inf stable de F , est la fonction stable ayant pour trace l'intersection des traces des fonctions de F .

Il reste à vérifier que, dans le cas où les fonctions de F sont fortement stables, que $\sqcap F$ est fortement stable.

soit $A = \{a_1, \dots, a_p\} \in \mathcal{C}_1$.

Alors $\sqcap F^\bullet(A) \subseteq f^\bullet(A)$ pour toute $f \in F$. Comme f est fortement stable on a $f^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$ et donc $\sqcap F^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$.

Montrons que $\bigcap \sqcap F^\bullet(A) \subseteq \sqcap F(\bigcap A)$.

Soit $\alpha \in \bigcap \sqcap F^\bullet(A) = \sqcap F^\bullet(a_1) \cap \dots \cap \sqcap F^\bullet(a_p)$. Alors, pour tout $i \leq p$, on a $b_i \subseteq a_i$ tel que $(b_i, \alpha) \in tr(\sqcap F) = tr(f_1) \cap \dots \cap tr(f_n)$.

Ainsi pour tout $j \leq n$ on a $(b_1, \alpha), \dots, (b_p, \alpha) \in tr(f_j)$, ce qui implique, d'après le théorème 1.5.2, que $b_1 = \dots = b_p = b$. Donc $(b, \alpha) \in tr(\sqcap F)$ avec $b \subseteq \bigcap A$, ce qui entraîne que $\alpha \in \sqcap F(\bigcap A)$.

□

2.5 Produits de QDC

On a fixé le cadre dans lequel on se place : celui des domaines qualitatifs avec cohérence, QDC, et des fonctions fortement stables.

On veut montrer que ce cadre peut fournir des β -modèles fonctionnels selon la définition donnée page 40. Pour cela on a besoin, dans une première étape, de définir ce qu'est la forte stabilité pour une fonction de plusieurs variables.

Rappelons que l'on a choisi une présentation non catégorique, et ceci nous oblige ici à être très précis sur la définition du produit de plusieurs QDC.

Rappelons que, si D_1, \dots, D_n sont des ensembles, alors $D_1 + \dots + D_n = \{(D_1 \times \{1\}) \cup (D_2 \times \{2\}) \cup \dots \cup (D_n \times \{n\})\}$.

Si $C \subseteq D_1 + \dots + D_n$ on note, pour $i \leq n$, $p_i(C) = \{a \in D_i; (a, i) \in C\}$. Si $B \subseteq D_i$, on note $\pi_i(B) = \{(b, i); b \in B\}$.

Définition 2.5.1 *Le domaine qualitatif avec cohérence produit des domaines qualitatifs avec cohérence $(\mathcal{D}_i, \mathcal{C}_i)_{i \leq n}$ est par définition le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ où :*

$\mathcal{D} = \{a \subseteq D_1 + \dots + D_n; \forall i \leq n p_i(a) \in \mathcal{D}_i\}$

et \mathcal{C} est la cohérence sur \mathcal{D} définie par : $\mathcal{C} = \{A \subseteq_f^* \mathcal{D}; \forall i \leq n p_i^\bullet(A) \in \mathcal{C}_i\}$.

Il est facile de voir que \mathcal{D} est un domaine qualitatif de trame $D_1 + \dots + D_n$, que la fonction p_i de \mathcal{D} vers \mathcal{D}_i est fortement stable relativement à \mathcal{C} et \mathcal{C}_i , que la fonction π_i de \mathcal{D}_i vers \mathcal{D} est fortement stable relativement à \mathcal{C} et \mathcal{C}_i et, enfin que les fonctions P_n et Π_n sont des bijections réciproques où :

P_n est la fonction de \mathcal{D} vers $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ définie par $P_n(a) = (p_1(a), \dots, p_n(a))$;

et Π_n est la fonction de $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ vers \mathcal{D} définie par $\Pi_n(a_1, \dots, a_n) = \pi_1(a_1) \cup \dots \cup \pi_n(a_n)$.

La définition de \mathcal{D} est motivée par le fait que le produit ensembliste $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ n'est évidemment pas un domaine qualitatif.

On appelle \mathcal{D} le **domaine qualitatif produit** des $(\mathcal{D}_i)_{i \leq n}$. Et on désigne par \mathcal{P} le produit ensembliste de $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$.

Remarque :

\mathcal{D} est le produit des $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ dans la catégorie des domaines qualitatifs avec cohérences et des fonctions fortement stables et $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ est leurs produit ensembliste.

On rappelle que l'ordre produit sur $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ est l'ordre, noté \leq , défini par :

$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $\forall i \leq n \ a_i \subseteq b_i$.

Définition 2.5.2 Soit $A \subseteq \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$.

Le sup de A pour l'ordre produit, c'est à dire le sup composante par composante, s'il existe, est noté : $\bigvee A = (\bigcup(A)_1, \dots, \bigcup(A)_n)$.

L'inf de A pour le même ordre est désigné par :

$\bigwedge A = (\bigcap(A)_1, \dots, \bigcap(A)_n)$.

On dit que $A \subseteq \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ est filtrant pour l'ordre produit si et seulement si tous les $(A)_i$ le sont pour l'inclusion.

On utilise ici la notation suivante $(g \circ f)^\bullet = g^\bullet \circ f^\bullet$.

On ne peut pas parler pour Π_n et P_n de fonction fortement stable car le produit ensembliste $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ n'est pas un QDC. Mais on peut montrer que ces deux fonctions préservent les sups filtrants, que Π_n préserve les inf des sous ensembles finis et non vide de \mathcal{P} dont les projections sont dans les cohérences \mathcal{C}_i et enfin que P_n préserve les inf des éléments de \mathcal{C} .

Lemme 2.5.3 Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1), \dots, (\mathcal{D}_n, \mathcal{C}_n)$ des domaines qualitatifs avec cohérences et $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ leur domaine qualitatif avec cohérence produit.

1. Soit A filtrant dans $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$. Alors $\Pi_n^\bullet(A)$ est filtrant dans \mathcal{D} et $\Pi_n(\bigvee A) = \bigcup \Pi_n^\bullet(A)$.
2. Soit A filtrant dans \mathcal{D} . Alors $P_n^\bullet(A)$ est filtrant dans $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ et $P_n(\bigcup A) = \bigvee P_n^\bullet(A)$.
3. Soit $A \subseteq_f^* \mathcal{P}$ tel que pour tout $i \leq n \ (A)_i \in \mathcal{C}_i$. Alors $\Pi_n(\bigwedge A) = \bigcap \Pi_n^\bullet(A)$.
4. Soit $A \in \mathcal{C}$. Alors $P_n(\bigcap A) = \bigwedge P_n^\bullet(A)$.
5. Soit $A \subseteq_f^* \mathcal{P}$. Alors $\Pi_n^\bullet(A) \in \mathcal{C}$ si et seulement si pour tout $i \leq n \ (A)_i \in \mathcal{C}_i$.

Preuve :

1. Découle directement de la croissance et de la continuité des π_i pour tout $i \leq n$.
2. Découle directement de la croissance et de la continuité des p_i pour tout $i \leq n$.
3.
$$\begin{aligned} \Pi_n(\bigwedge A) &= \pi_1(\bigcap(A)_1) \cup \dots \cup \pi_n(\bigcap(A)_n) \\ &= \bigcap \pi_1^\bullet((A)_1) \cup \dots \cup \bigcap \pi_n^\bullet((A)_n) \text{ car pour tout } i \leq n (A)_i \in \mathcal{C}. \\ &= \bigcap \Pi_n^\bullet(A). \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} \bigwedge P_n^\bullet(A) &= (\bigcap(P_n^\bullet(A))_1, \dots, \bigcap(P_n^\bullet(A))_n) \\ &= (\bigcap p_1^\bullet(A), \dots, \bigcap p_n^\bullet(A)) \\ &= (p_1(\bigcap A), \dots, p_n(\bigcap A)) \\ &= P_n(\bigcap A) \end{aligned}$$

5. Immédiat.

□

Lemme 2.5.4 *Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1), \dots, (\mathcal{D}_n, \mathcal{C}_n), (\mathcal{D}'_1, \mathcal{C}'_1), \dots, (\mathcal{D}'_p, \mathcal{C}'_p)$ des domaines qualitatifs avec cohérence, $(\mathcal{D}, \mathcal{C}), (\mathcal{D}', \mathcal{C}')$ leurs produits et $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ leurs produits ensemblistes.*

Pour toute fonction f de \mathcal{P} vers \mathcal{P}' les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Pi_p \circ f \circ P_n$ de \mathcal{D} vers \mathcal{D}' est fortement stable relativement à \mathcal{C} et \mathcal{C}' .
2. (a) Pour tout $A \subseteq \mathcal{P}$, A dirigé, $f(\bigvee A) = \bigvee f^\bullet(A)$.
 (b) Pour tout $A \subseteq_f^* \mathcal{P}$ tel que, pour tout $i \leq n$, $(A)_i \in \mathcal{C}_i$ on a :
 pour tout $j \leq p$ $(f^\bullet(A))_j \in \mathcal{C}'_j$, et
 $f(\bigwedge A) = \bigwedge f^\bullet(A)$.

Preuve L'équivalence de ces deux propriétés est facile à établir en utilisant de façon directe le lemme 2.5.3 et en remarquant que $f = P_p \circ \Pi_p \circ f \circ P_n \circ \Pi_n$.

Le seul point ne découlant pas directement du lemme 2.5.3 est le suivant :

Si f de \mathcal{P} vers \mathcal{P}' vérifie la deuxième propriété et si $A \in \mathcal{C}$ alors $(\Pi_p \circ f \circ P_n)^\bullet(A) \in \mathcal{C}'$. Ceci revient à montrer que pour tout $j \leq p$ $p_j^\bullet((\Pi_p \circ f \circ P_n)^\bullet(A)) = ((f \circ P_n)^\bullet(A))_j \in \mathcal{C}'_j$.

Or pour tout $i \leq n$ $(P_n^\bullet(A))_i \in \mathcal{C}_i$ car $A \in \mathcal{C}$. Donc, par hypothèse, $((f \circ P_n)^\bullet(A))_j \in \mathcal{C}'_j$ ceci pour tout $j \leq p$.

□

Une conséquence directe de ce lemme est que l'on peut identifier le produit $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ des QDC $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1), \dots, (\mathcal{D}_n, \mathcal{C}_n)$ de la catégorie des QDC et des fonctions fortement stables et \mathcal{P} leur produit ensembliste : à $u \in \mathcal{D}$ correspond $(p_1(u), \dots, p_n(u)) \in \mathcal{P}$ et à $A \in \mathcal{C}$ correspond $(p_1^\bullet(A), \dots, p_n^\bullet(A))$.

Définition 2.5.5 Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1), \dots, (\mathcal{D}_n, \mathcal{C}_n), (\mathcal{D}'_1, \mathcal{C}'_1), \dots, (\mathcal{D}'_p, \mathcal{C}'_p)$ des domaines qualitatifs avec cohérence et $(\mathcal{D}, \mathcal{C}), (\mathcal{D}', \mathcal{C}')$ leur produits.

On dit que f de $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ vers $\mathcal{D}'_1 \times \dots \times \mathcal{D}'_p$ est fortement stable relativement à $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_p$ si et seulement si $\Pi_p \circ f \circ P_n$ de \mathcal{D} vers \mathcal{D}' est fortement stable relativement à \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Le fait suivant est un groupement de propriétés, faciles à vérifier, sur les fonctions fortement stables. On a besoin, entre autre, de ces propriétés pour construire des β -modèles fonctionnels fortement stables.

Fait 2.5.6 On a les conséquences immédiates suivantes :

1. Toute composée de deux fonctions fortement stables est fortement stable.
2. Les fonctions constantes et les projections sont fortement stables.
3. Pour tous entiers $n, i \leq n$ et $\bar{d} \in \mathcal{D}^n$, la fonction $h : x \mapsto (d_1, \dots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \dots, d_n)$ est fortement stable de \mathcal{D} dans \mathcal{D}^n .
4. Si $f : \mathcal{D}^n \mapsto \mathcal{D}$ et $g : \mathcal{D}^n \mapsto \mathcal{D}$ sont fortement stables alors $h : \mathcal{D}^n \mapsto \mathcal{D}^2$ qui à \bar{d} associe $(f(\bar{d}), g(\bar{d}))$ est fortement stable.
5. Si la fonction f de $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ vers $\mathcal{D}'_1 \times \dots \times \mathcal{D}'_p$ est fortement stable alors la fonction g définie par $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, est fortement stable.
6. Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1), \dots, (\mathcal{D}_n, \mathcal{C}_n), (\mathcal{D}'_1, \mathcal{C}'_1)$ des domaines qualitatifs avec cohérence. Si f de $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$ vers \mathcal{D}'_1 ne dépend que des m premières coordonnées ($m \leq n$) alors f est fortement stable relativement à $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}'_1$ si et seulement si la fonction qu'elle induit sur $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_m$ est fortement stable relativement à $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}'_1$.

On rappelle que lorsque l'on parle de modèles fonctionnel sur un ensemble \mathcal{D} , voir page 40, on a besoin d'un sous ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{F}(\mathcal{D})$, l'ensemble des applications de $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ dans \mathcal{D} qui ne dépendent que d'un nombre finies de coordonnées. La sixième propriété permet de justifier la définition suivante :

Définition 2.5.7 Soit $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un domaine qualitatif avec cohérence.

On considère $(\mathcal{D}, \mathcal{C})^{\mathbb{N}}$ le produit ensembliste de \aleph_0 copie de $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions fortement stables de $\mathcal{D}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \mathcal{D}$ qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. On dira que $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ est fortement stable si la fonction qu'elle induit sur \mathcal{D}^n l'est pour tout n assez grand.

Enfin notons que toute fonction fortement stable $f : \mathcal{D}^n \Leftrightarrow \mathcal{D}$ a un prolongement canonique sur $(\mathcal{D}, \mathcal{C})^{\mathbb{N}}$.

2.6 Hypercohérences

Si on cherche à résoudre le problème de la full-abstraction de PCF dans le cadre de la sémantique fortement stable, il est nécessaire qu’au type de base toutes les fonctions soient séquentielles. Dans cette optique, il ressort des deux derniers exemples donnés page 43 que “la bonne cohérence” sur l’ensemble des Booléens \mathcal{B} est $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, voir l’exemple page 43. En effet, g_T n’est pas séquentielle et ne doit donc pas être fortement stable ; en revanche f est séquentielle et doit donc être fortement stable ; seule $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ réalise ces conditions. (Pour une définition d’une fonction séquentielle sur un produit de domaines plats se reporter à l’introduction page 11.)

Il apparaît donc que l’existence de plusieurs cohérences acceptables sur un DI-domaine \mathcal{D} est plutôt un défaut. Ehrhard a remédié à ce problème en construisant la catégorie des **hypercohérences** [26], qui est une sous-catégorie des DI-domaines avec cohérence acceptable dans laquelle :

- les domaines et les cohérences sont plus étroitement reliés,
- les fonctions fortement stables sur les produits de domaines plats sont les fonctions séquentielles.

Une hypercohérence est la donnée d’un ensemble D et d’un ensemble \mathcal{C} de parties finies non vides de D , contenant les singletons. Le couple $H = (D, \mathcal{C})$ engendre alors un domaine qualitatif avec cohérence acceptable $(\mathcal{D}(H), \mathcal{C}(H))$.

2.6.1 Définitions et propriétés fondamentales

Définition 2.6.1 Une **hypercohérence** est une paire $H = (D, \mathcal{C})$, où D est un ensemble et où $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_f^*(D)$ est tel que $\{a\} \in \mathcal{C}$, pour tout $a \in D$.

L’ensemble D est appelé la **trame** de l’hypercohérence H , et \mathcal{C} , la **précohérence** de H (la cohérence atomique chez Ehrhard).

On dit qu’une hypercohérence H est héréditaire (resp. binaire) si \mathcal{C} l’est (voir les définitions des notions d’ensemble héréditaire et binaire dans la première section de ce chapitre).

Toute hypercohérence binaire est héréditaire car \mathcal{C} contient tous les singletons. La donnée d’une précohérence binaire sur un ensemble D est exactement la donnée d’une relation de cohérence sur cet ensemble (voir la quatrième assertion de la proposition 2.6.3).

Définition 2.6.2 Soit $H = (D, \mathcal{C})$ une hypercohérence. On définit :

$$\mathcal{D}(H) = \{a \subseteq D ; \forall u \subseteq D, u \subseteq_f^* a \Rightarrow u \in \mathcal{C}\},$$

$$\mathcal{C}(H) = \{A \subseteq_f^* \mathcal{D}(H) ; \forall u \subseteq D, u \triangleleft_f A \Rightarrow u \in \mathcal{C}\},$$

où $u \triangleleft_f A$ signifie que u est une multisection finie de A .

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera \mathcal{D} pour $\mathcal{D}(H)$ et \mathcal{C} pour $\mathcal{C}(H)$. De même, $\mathcal{D}(H_1)$ se notera \mathcal{D}_1 et $\mathcal{C}(H_1)$ se notera \mathcal{C}_1 .

Remarques

- $\emptyset \in \mathcal{D}$ et $\{\emptyset\} \in \mathcal{C}$
- $\forall \alpha \in D \ \{\alpha\} \in \mathcal{D}$.
- $\forall \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{D}, \ \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\} \in \mathcal{C}$ (car la seule multisection de cet ensemble est $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$).
- Si $A \subseteq_f^* \mathcal{D}$ avec $\emptyset \in A$ alors $A \in \mathcal{C}$. En effet il n'y a pas dans ce cas de multisection non vide de A .

Exemples

1. Soient n un entier ($n \geq 1$), D un ensemble, et $\mathcal{D} = \{u \subseteq_f^* D ; \#u \leq n\}$. Alors, $H = (D, \mathcal{D})$ est une hypercohérence, avec

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}, \cup \{\emptyset\} \text{ et } \mathcal{C}(H) = \{A \subseteq_f^* \mathcal{D} ; \#\cup A \leq n\}.$$

2. Soit $H = (D, \mathcal{P}_f^*(D))$. Alors, H est une hypercohérence, avec $\mathcal{D}(H) = \mathcal{P}(D)$ et $\mathcal{C}(H) = \mathcal{P}_f^*(\mathcal{D}(H))$.
3. Le domaine qualitatif \mathcal{B} des booléens, de trame $B = \{v, f\}$, est engendré par une unique hypercohérence : B n'admet que deux précohérences, $\mathcal{D}_1 = \{\{v\}, \{f\}\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{\{v\}, \{f\}, \{v, f\}\}$. Posons $H_1 = (B, \mathcal{D}_1)$ et $H_2 = (B, \mathcal{D}_2)$. Il est facile de vérifier que le domaine engendré par H_2 est un treillis (et donc n'est pas \mathcal{B}), alors que celui engendré par H_1 est \mathcal{B} . Et que de plus la cohérence associée à H_1 est la cohérence $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ définie dans l'exemple de la section 2.3 (poser $V = \{v\}$ et $F = \{f\}$).

Proposition 2.6.3 1. \mathcal{D} est un domaine qualitatif de trame D .

2. \mathcal{C} est une cohérence acceptable.
3. $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{C}$.
4. \mathcal{D} est un espace cohérent si et seulement si \mathcal{D} est binaire.

Preuve :

1. Immédiat.
2. On se donne $a \in \mathcal{D}$, $A = \{a_1, \dots, a_p\} \in \mathcal{C}$ et X_1, \dots, X_n des sous ensembles filtrant de \mathcal{D} tels que, pour tout $(d_1, \dots, d_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, $\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathcal{C}$.
 - (a) Soit $u \subseteq_f^* D$ tel que $u \triangleleft \{a\}$. Nécessairement $u \subseteq a$ donc $u \in \mathcal{D}$.

(b) Soit $B = \{b_1, \dots, b_l\} \sqsubseteq A$.

Si $\emptyset \in B$ alors $B \in \mathcal{C}$.

Sinon soit $u \triangleleft_f B$. Alors $u \triangleleft_f A$ car, d'une part $u \subseteq \bigcup B \Rightarrow u \subseteq \bigcup A$ et d'autre part le fait que, pour tout $j \leq p$, $u \cap b_j \neq \emptyset$ entraîne que, pour tout $i \leq n$, $u \cap a_i \neq \emptyset$.

(c) Soit $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \triangleleft_f \{\bigcup X_1, \dots, \bigcup X_n\}$. Alors $u \subseteq \bigcup X_1 \cup \dots \cup \bigcup X_n$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u \cap \bigcup X_i \neq \emptyset$. Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a un $j_i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha_{j_i} \in \bigcup X_i$ ce qui implique que $\alpha_{j_i} \in d_i \in X_i$. De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a un $i_j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_j \in \bigcup X_{i_j}$, d'où $\alpha_j \in d_{i_j} \in X_{i_j}$. Il vient que $u \triangleleft_f \{d_1, \dots, d_n\}$ et par hypothèse cet ensemble appartient à \mathcal{C} donc $u \in \mathcal{C}$.

3. Soit $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ et $u \subseteq_f^* D$ tel que $u \triangleleft A$. Alors $u \subseteq_f^* \bigcup A \in \mathcal{D}$, donc $u \in \mathcal{C}$.

4. Il suffit de remarquer que \mathcal{D} , qui est toujours héréditaire, est binaire si et seulement si \mathcal{C} , l'est.

□

L'ensemble \mathcal{D}_c des éléments compacts de \mathcal{D} est la plus grande précohérence héréditaire incluse dans \mathcal{D} , c'est à dire l'ensemble des éléments de \mathcal{D} dont tout sous ensemble non vide est dans \mathcal{D} .

Proposition 2.6.4 Soient $H = (D, \mathcal{C})$ une hypercohérence et $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ le domaine qualitatif avec cohérence engendré par H . Alors : H est héréditaire $\Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{D}_c \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$

Preuve Il est facile de voir que $\mathcal{C} = \mathcal{D}_c \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow H$ est héréditaire. Supposons maintenant que H est héréditaire. Soit $A \in \mathcal{C}$. Si $\bigcup A = \emptyset$ alors $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. Sinon considérons $x \subseteq_f^* \bigcup A$. Alors il est clair qu'il existe $y \subseteq_f^* D$ tel que $x \subseteq y \triangleleft A$. Donc $y \in \mathcal{C}$, et H étant héréditaire, $x \in \mathcal{C}$, ce qui nous affirme que $\bigcup A \in \mathcal{D}$. Ainsi $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ et, d'après la proposition 2.6.3, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. Enfin supposons que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. Soit $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{D}_f$. Alors $W = \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\} \in \mathcal{C}$ car $\bigcup W = u \in \mathcal{D}$. Et $u \triangleleft W$, donc $u \in \mathcal{C}$.

□.

On note $\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_f(\mathcal{D}_c)$ l'ensemble des éléments A de \mathcal{C} dont les éléments sont des parties finies de D . On appelle \mathcal{C}_f la **cohérence finie** de \mathcal{D} . On peut remarquer que la cohérence vérifie une propriété de continuité. En effet il suffit de connaître la cohérence finie pour connaître toute la cohérence.

Dans la proposition suivante on ne considère pas les sous ensembles finis et non vide A de \mathcal{D} tel que $\emptyset \in A$. En effet il est clair que si $\emptyset \in A$ alors $A \in \mathcal{C}$.

Proposition 2.6.5 Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}_f^*(\mathcal{D})$, avec, pour tout $i \leq n$, $a_i \neq \emptyset$. L'ensemble A est dans \mathcal{C} si et seulement si pour tout $b_1 \subseteq_f^* a_1, \dots, b_n \subseteq_f^* a_n$ on a $B = \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{C}_f$.

Preuve :

1. Supposons que $A \in \mathcal{C}$. Puisque $B \sqsubseteq A$ on a $B \in \mathcal{C}$.
2. Supposons que, pour tous b_1, \dots, b_n tels que $b_1 \sqsubseteq_f^* a_1, \dots, b_n \sqsubseteq_f^* a_n$, $B = \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{C}_f$.
Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}_f^*(\mathcal{D})$. Alors $A = \{\bigcup K(a_1), \dots, \bigcup K(a_n)\}$ avec, pour tout $i \leq n$ $K(a_i)$ filtrant dans \mathcal{D} . Par hypothèse pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in K(a_1) \times \dots \times K(a_n)$ l'ensemble $B = \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathcal{C}$. Donc, d'après la troisième propriété de cohérence acceptable, $A \in \mathcal{C}$.

□

2.6.2 Espaces de fonctions

Une fonction fortement stable de H_1 vers H_2 est par définition une fonction de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 qui est fortement stable relativement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Nous désignerons par $[\mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2]_{FS}$ l'ensemble des fonctions fortement stables de H_1 vers H_2 et par $\mathbf{H}_1 \Rightarrow \mathbf{H}_2$ l'ensemble de leur traces.

L'exemple suivant, que nous exploiterons dans le quatrième chapitre, met en évidence l'intérêt que nous avons de travailler dans le cadre des hypercohérences, plutôt que dans le cadre plus général des DIC.

Exemple 2.6.6 Soient H_1 et H_2 des hypercohérences.

Considérons h, k des compacts de $\mathcal{D}(H_1)$ tels que $\{h, k\} \notin \mathcal{C}(H_1)$ et $c, d \in \mathcal{D}(H_2)$. La fonction g de $\mathcal{D}(H_1)$ dans $\mathcal{D}(H_2)$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \geq h, \\ d & \text{si } x \geq k, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

est fortement stable.

Il est connu que ce type de fonction est stable (remarquer que $\{h, k\} \notin \mathcal{C}(H_1)$ entraîne que ces deux compacts sont incompatibles).

Montrons que g est fortement stable.

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}(H_1)$. Vérifions que $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}(H_2)$.

- $g^\bullet(A) \in \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, c\}, \{\emptyset, d\}, \{c\}, \{d\}\}$ alors il est clair que $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}(H_2)$.
- Si $g^\bullet(A) = \{c, d\}$ alors $\{h, k\} \sqsubseteq A$ ce qui entraîne que $\{h, k\} \in \mathcal{C}(H_1)$ contrairement à l'hypothèse.
- $g^\bullet(A) = \{\emptyset, c, d\}$. Alors il est clair que $g^\bullet(A) \in \mathcal{C}(H_2)$ car cet ensemble n'a pas de multisection non vide.

Enfin il est facile de vérifier que $g(\bigcap A) = \bigcap g^\bullet(A)$.

Remarque :

Il est possible de définir de façon analogue de telles fonctions g dans tout DIC en remplaçant \emptyset par \perp . Toutefois g ne sera alors fortement stable que dans le cas où l'on aura $\{\perp, c, d\} \in \mathcal{C}_2$.

Si $H_1 = (D_1, , 1)$ et $H_2 = (D_2, , 2)$ sont deux hypercohérences, le domaine qualitatif $H_1 \Rightarrow H_2$ est engendré par une hypercohérence $\mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$, induite par H_1 et H_2 :

$$H_1 \Leftrightarrow H_2 = ((\mathcal{D}_1)_c \times D_2, , (H_1 \Leftrightarrow H_2)), \quad \text{où } , (H_1 \Leftrightarrow H_2) \text{ est}$$

$$\{w \subseteq (\mathcal{D}_1)_c \times D_2 ; ((w)_1 \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow (w)_2 \in , 2) \wedge ((w)_1 \in \mathcal{C}_1^{>1} \Rightarrow (w)_2 \in , 2^{>1})\},$$

et où $Y^{>1}$ désigne l'ensemble des éléments de Y de cardinal strictement supérieur à 1.

Toutes hypercohérences $H_1 = (D_1, , 1)$ et $H_2 = (D_2, , 2)$ induisent une hypercohérence $H_1 \Leftrightarrow H_2$, de trame $\mathcal{D}(H_1)_c \times D_2$, dont le QDC associé est l'ensemble des traces des fonctions fortement stables de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$. On en déduit, grâce à l'application tr , un isomorphisme pour l'ordre entre l'ensemble des fonctions fortement stables de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$ et le domaine engendré par $H_1 \Leftrightarrow H_2$.

Proposition 2.6.7 $H_1 \Leftrightarrow H_2$ est une hypercohérence et $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2) = H_1 \Rightarrow H_2$.

Preuve : Vérifions tout d'abord que $H_1 \Leftrightarrow H_2$ est une hypercohérence. Il suffit pour cela de voir que la précohérence contient tous les singletons de la trame correspondante. Soient $(a, \alpha) \in (\mathcal{D}_1)_c \times D_2$ et $w = \{(a, \alpha)\}$. Alors $(w)_2 = \{\alpha\}$ est dans la précohérence de H_2 par définition. Donc $w \in , (H_1 \rightarrow H_2)$.

Montrons maintenant la deuxième partie de la proposition.

1. Soit $f : \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2$ une fonction fortement stable.

Montrons que $tr f$ est un élément de $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

Si $tr f = \emptyset$ alors évidemment $tr f \in \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$

Sinon il nous faut vérifier que, $\forall u \subseteq_f^* tr f, u \in , (H_1 \rightarrow H_2)$.

Considérons $u = \{(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)\}$ et supposons que $(u)_1 = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}_1$.

Montrons qu'alors $(u)_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in , 2$.

On a $\alpha_1 \in f(a_1), \dots, \alpha_n \in f(a_n)$ donc $(u)_2 \subseteq f(a_1) \cup \dots \cup f(a_n)$ et pour tout $i \leq n$ $(u)_2 \cap f(a_i) \neq \emptyset$. Ce qui se résume par : $(u)_2 \triangleleft f^\bullet((u)_1)$. Or $(u)_1 \in \mathcal{C}_1$ et f est fortement stable donc $f^\bullet((u)_1) \in \mathcal{C}_2$ et donc $(u)_2$ est dans $, 2$.

Il reste à voir que $\sharp(u)_1 > 1$ implique $\sharp(u)_2 > 1$.

Sinon $u = \{(a_1, \alpha), \dots, (a_n, \alpha)\}$ avec $a_i \neq a_j$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$.

On a donc $\alpha \in f(a_1), \dots, \alpha \in f(a_n)$, d'où $\alpha \in f(a_1) \cap \dots \cap f(a_n) = f(\bigcap (u)_1)$ car $(u)_1 \in \mathcal{C}_1$ et f est fortement stable. Le fait que les éléments de $(u)_1$ ne soient pas tous identiques entraîne que $\bigcap (u)_1 \subsetneq a_l$ pour un certain $l \in \{1, \dots, n\}$, or ceci contredit la minimalité de a_l .

2. Supposons que $t \in \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

Si $t = \emptyset$ alors f^t est la fonction constante qui vaut vide partout et cette fonction

est évidemment fortement stable.

Sinon considérons $f^t = f : \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2$ définie par $f(u) = \{\alpha \in D_2; \exists a \subseteq u (a, \alpha) \in t\}$.

Montrons que f est fortement stable et que sa trace est t .

(a) Il est facile de vérifier que f est continue.

(b) f est fortement stable :

Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{C}_1$

i. Montrons que $f^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$.

Si $\emptyset \in f^\bullet(A)$ alors on a l'appartenance voulue. Sinon on considère $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \triangleleft f^\bullet(A)$, i.e. $u \subseteq \bigcup f(A)$ et pour tout $i \leq n$ $u \cap f(x_i) \neq \emptyset$.

On a :

Pour tout $j \leq p$ il existe $i_j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(a_{i_j}, \alpha_j) \in t$ avec $a_{i_j} \subseteq x_{i_j}$.

Pour tout $i \leq n$ il existe $j_i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $(a_i, \alpha_{j_i}) \in t$ avec $a_i \subseteq x_i$.

Soit $V = \{(a_{i_1}, \alpha_1), \dots, (a_{i_p}, \alpha_p), (a_1, \alpha_{j_1}), \dots, (a_n, \alpha_{j_n})\}$.

$V \subseteq t$ et $V \subseteq_f^* (\mathcal{D}_1)_c \times D_2$ donc $V \in \mathcal{D}(H_1 \rightarrow H_2)$. D'autre part

$(V)_1 = \{a_1, \dots, a_n\} \sqsubseteq A$ donc $(V)_1 \in \mathcal{C}_1$. Ainsi $(V)_2 = u \in \mathcal{D}_2$, d'où $f(A) \in \mathcal{C}_2$.

ii. Montrons que $f(\bigcap A) \supseteq \bigcap f^\bullet(A)$.

Si $\bigcap f^\bullet(A) = \emptyset$ alors l'inclusion est évidente.

Sinon soit $\alpha \in \bigcap f^\bullet(A)$. Alors il existe, pour tout $i \leq n$, $a_i \subseteq x_i$ tel que $(a_i, \alpha) \in t$. L'ensemble $A \in \mathcal{C}_1$ et $\{a_1, \dots, a_n\} \sqsubseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ donc $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}_1$. Considérons $w = \{(a_1, \alpha), \dots, (a_n, \alpha)\} \subseteq_f^* t \in \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ ce qui entraîne que $w \in \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$. On a $(w)_1 \in \mathcal{C}_1$ et $\sharp(w)_2 = 1$ donc $\sharp(w)_1 = 1$ ce qui nous dit que $a_1 = \dots = a_n = a$ d'où $a \subseteq x_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc $a \subseteq \bigcap A$, ce qui donne $\alpha \in f(\bigcap A)$.

(c) Par définition $\text{tr}f = \{(b, \beta) \in (\mathcal{D}_1)_c \times D_2, \beta \in f(b) \text{ et } \beta \notin f(b') \text{ pour tout } b' \subsetneq b\}$.

Remarquons tout d'abord que l'on ne peut pas avoir (a_1, α_1) et $(a_2, \alpha_1) \in t$ avec $a_1 \subsetneq a_2$.

Supposons en effet que $w = \{(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_1)\} \subseteq t$ avec $a_1 \subseteq a_2$. Ainsi $(w)_1 = \{a_1, a_2\}$ et $(w)_2 = \{\alpha_1\}$. Et $(w)_1 \sqsubseteq \{a_2\}$ car $a_1 \subseteq a_2$ donc $(w)_1 \in \mathcal{C}_1$. Si $a_1 \neq a_2$ alors $(w)_1 \in \mathcal{C}_1^{>1}$ donc $(w)_2$ devrait être dans $\mathcal{D}_2^{>1}$, ce qui est faux ici. Donc $a_1 = a_2$.

Montrons que $\text{tr}f = t$.

Soit $(c, \gamma) \in \text{tr}f$. Alors $\gamma \in f(c)$ ce qui est équivalent au fait qu'il existe $a \subseteq c$ tel que $(a, \gamma) \in t$. Or $(a, \gamma) \in t$ implique que $\gamma \in f(a)$. Comme c est minimal tel que $\gamma \in f(c)$ on a $a = c$. Ce qui implique $(c, \gamma) \in t$.

Supposons maintenant que $(c, \gamma) \in t$. Alors $\gamma \in f(c)$.

Supposons que l'on ait $\gamma \in f(c')$ pour $c' \subseteq c$. Par définition $\gamma \in f(c')$ si et seulement si il existe $a \subseteq c'$ $(a, \gamma) \in t$. si $c' \subsetneq c$ alors (a, γ) et $(c, \gamma) \in t$ avec $a \subsetneq c$ ce qui est impossible d'après la remarque précédente, donc $(c, \gamma) \in \text{tr}f$.

□

Notation : tr^{-1} désignera l'application qui associe à tout $t \in H_1 \Rightarrow H_2$ la fonction f^t définie par $f(u) = \{\alpha \in D_2; \exists a \subseteq u (a, \alpha) \in t\}$.

De la démonstration de la proposition précédente et de la proposition 2.4.3 il résulte que :

Proposition 2.6.8 *tr et tr^{-1} sont des isomorphismes réciproques entre les ensembles ordonnés $([H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}, \leq_s)$ et $(H_1 \Rightarrow H_2, \subseteq)$.*

Remarque : Soient $\mathcal{D}(H_1)$ et $\mathcal{D}(H_2)$ deux domaines qualitatifs avec cohérence engendrés par H_1 et H_2 . Une fonction de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$ est fortement stable si et seulement si sa trace est un élément de $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

On donne sur l'ensemble des fonctions fortement stables de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$ une notion d'ensemble cohérent de fonction, notion induite par les cohérences de $\mathcal{D}(H_1)$ et $\mathcal{D}(H_2)$. L'image par l'application tr de cette cohérence sur $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ est exactement la cohérence engendré par $H_1 \Leftrightarrow H_2$. On a une caractérisation directe des ensembles de fonctions cohérents sur $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$.

Définition 2.6.9 *Un sous ensemble F de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ est appelé un ensemble cohérent de fonctions si et seulement si :*

- F est non vide et fini.
- Pour tout $A \in \mathcal{C}_1$ et pour tout recouvrement Ω de F , A , on a :
 $\{f(x); (f, x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}_2$.
 $\bigcap \{f(x); (f, x) \in \Omega\} = (\bigcap F)(\bigcap A)$.

Proposition 2.6.10 $\mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2) = tr^{\bullet\bullet}(\mathcal{F})$ où \mathcal{F} est l'ensemble de tout les ensembles cohérents de fonctions de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$.

Preuve Montrons que $\mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2) \subseteq tr^{\bullet\bullet}(\mathcal{F})$.

Il nous faut vérifier que si $T = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ alors $F = \{f^{t_1}, \dots, f^{t_n}\}$ est cohérent.

Soient $A = \{a_1, \dots, a_p\} \in \mathcal{C}_1$ et Ω un recouvrement de F et A .

1. Si $\emptyset \in \{f(x); (f, x) \in \Omega\}$ alors l'appartenance de cet ensemble a \mathcal{C}_2 est évidente.
2. Sinon considérons $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \triangleleft_f \{f(x); (t, x) \in \Omega\} = \{f^t(x); (t, x) \in \Omega'\}$ où Ω' est un recouvrement de T et A .
 Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ il existe $j_i \leq l$ et $v_i \leq n$ tels que $\alpha_{j_i} \in f^{t_{v_i}}(a_i)$. Donc il existe $a'_i \subseteq a_i$ tel que $(a'_i, \alpha_{j_i}) \in t_{v_i}$.
 Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ il existe $i_j \leq p$ et $v_i \leq n$ tels que $\alpha_j \in f^{t_{v_i}}(a_{i_j})$. Donc il

existe $a'_{i_j} \subseteq a_{i_j}$ tel que $(a'_{i_j}, \alpha_j) \in t_{v_i}$.

Enfin pour tout $k \leq n$ il existe $r_k \leq p$ et $p_k \leq l$ tels que $\alpha_{p_k} \in f^{t_k}(a_{r_k})$. Donc il existe $a'_{r_k} \subseteq a_{r_k}$ tel que $(a'_{r_k}, \alpha_{p_k}) \in t_k$.

Ainsi $W = \{(a'_1, \alpha_{j_1}), \dots, (a'_p, \alpha_{j_p}), (a'_{i_1}, \alpha_1), \dots, (a'_{i_l}, \alpha_l), (a'_{r_1}, \alpha_{p_1}), \dots, (a'_{r_n}, \alpha_{p_n})\} \triangleleft T$. Donc $W \in \mathcal{C}(H_1 \rightarrow H_2)$ et $(W)_1 \sqsubseteq A$ ce qui implique que $(W)_1 \in \mathcal{C}_1$ et donc $(W)_2 = u \in \mathcal{C}_2$.

3. Montrons que $\bigcap \{f^t(x); (t, x) \in \Omega'\} = (\bigcap F)(\bigcap A)$.

Si $\alpha \in (\bigcap F)(\bigcap A) = f^{\bigcap T}(\bigcap A)$ alors $\alpha \in f^t(a)$ pour tous $t \in T$ et $a \in A$. Donc clairement $\alpha \in \bigcap \{f^t(x); (t, x) \in \Omega'\}$.

Soit $\alpha \in \bigcap \{f^t(x); (t, x) \in \Omega'\}$.

Pour tout $i \leq n$ il existe $j_i \leq p$ tel que $(a'_{j_i}, \alpha) \in t_{i_i}$ avec $a'_{j_i} \subseteq a_{j_i}$.

Pour tout $j \leq p$ il existe $i_j \leq n$ tel que $(a'_{j_i}, \alpha) \in t_{i_j}$ avec $a'_{j_i} \subseteq a_{j_i}$.

Ainsi $W = \{(a'_1, \alpha), \dots, (a'_n, \alpha), (a'_{j_1}, \alpha), \dots, (a'_{j_n}, \alpha)\} \triangleleft T \in \mathcal{C}(H_1 \rightarrow H_2)$ donc $W \in \mathcal{C}(H_1 \rightarrow H_2)$. Et $(W)_1 \sqsubseteq A$ ce qui implique que $(W)_1 \in \mathcal{C}_1$. Si $(W)_1 \in \mathcal{C}_1^{>1}$ alors $(W)_2 \in \mathcal{C}_2^{>1}$. Or $(W)_2 = \{\alpha\} \in \mathcal{C}_2$, donc $a'_1 = \dots = a'_n = a'_{j_1} = a'_{j_n} = a$. On a $(a, \alpha) \in \bigcap T$ avec $a \subseteq \bigcap A$. On peut donc conclure que $\alpha \in f^{\bigcap T}(\bigcap A)$.

Montrons maintenant que $tr^{\bullet\bullet}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

Soit $F = \{f^{t_1}, \dots, f^{t_n}\} \in \mathcal{F}$. Si $\emptyset \in tr^{\bullet}F$ alors cet ensemble est dans $\mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$. Sinon considérons $u = \{(a_1, \alpha_1), \dots, (a_l, \alpha_l)\} \triangleleft_f tr^{\bullet}F$. On veut montrer que $u \in \mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

On a :

$\forall i \leq l \exists j_i \leq n \alpha_i \in f^{t_{j_i}}(a_i)$.

$\forall j \leq n \exists i_j \leq l \alpha_{i_j} \in f^{t_j}(a_{i_j})$.

Considérons $\Omega = \{(t_{j_1}, a_1), \dots, (t_{j_l}, a_l), (t_1, a_{i_1}), \dots, (t_n, a_{i_n})\}$ qui est un recouvrement de $tr^{\bullet}F$ et de $(u)_1$. Supposons que $(u)_1 \in \mathcal{C}_1$, alors $W = \{f^t(x); (t, x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}_2$ car $F \in \mathcal{F}$.

Et puisque $u \triangleleft_f W$ on a $(u)_2 \in \mathcal{C}_2$.

Supposons maintenant que $\sharp(u)_2 = 1$. Alors $u = \{(a_1, \alpha), \dots, (a_l, \alpha)\}$ et $\alpha \in f^{t_{j_1}}(a_1) \cap \dots \cap f^{t_n}(a_{i_n}) = \bigcap \{f^t(x); (t, x) \in \Omega'\} = (\bigcap F)(\bigcap (u)_1)$. Donc pour tout $(t, \alpha) \in \Omega$ on a $\alpha \in f^t(\bigcap A)$ et $(a, \alpha) \in t$, ce dernier point nous dit que $\alpha \notin f^t(b)$ pour tout $b \subsetneq a$. Ainsi $\bigcap A = a$, ceci pour tout $a \in (u)_1$, donc $\sharp(u)_1 = 1$.

□

Corollaire 2.6.11 *Les fonctions tr de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ vers $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ et tr^{-1} de $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ vers $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ sont fortement stables relativement à \mathcal{F} et $\mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.*

Preuve Découle directement de la proposition précédente, de la proposition 2.6.8 et du lemme 2.4.5.

□

2.6.3 Produits d'hypercohérence

On donne maintenant la définition du produit de n hypercohérences H_1, \dots, H_n . Ce produit est tel que le QDC engendré par le produit de ces hypercohérences est le produit défini dans la section 2.5 des n QDC engendrés respectivement par H_1, \dots, H_n .

Si $H_1 = (D_1, \cdot, \cdot), \dots, H_n = (D_n, \cdot, \cdot)$ sont des hypercohérences, le domaine qualitatif $\mathcal{D}(H_1) \times \dots \times \mathcal{D}(H_n)$ est engendré par une hypercohérence $\mathbf{H}_1 \times \dots \times \mathbf{H}_n$, induite par H_1, \dots, H_n :

$$H_1 \times \dots \times H_n = (D_1 + \dots + D_n, \cdot, \cdot), \text{ où } \cdot, \cdot \text{ est}$$

$$\{w \subseteq_f^* D_1 + \dots + D_n; \forall k \leq n \text{ si } p_j(w) = \emptyset \text{ pour tout } j \leq n \ j \neq k \text{ alors } p_k(w) \in \cdot, \cdot\},$$

et où $p_i(w)$ est la i -ème projection de w .

En particulier, \cdot, \cdot contient tous les $w \subseteq_f^* D_1 + \dots + D_n$ tels qu'il existe $i, j \leq n$, $i \neq j$ avec $p_i(w) \neq \emptyset$ et $p_j(w) \neq \emptyset$.

Proposition 2.6.12 *Soient $H_1 = (D_1, \cdot, \cdot), \dots, H_n = (D_n, \cdot, \cdot)$ n hypercohérences.*

Alors :

- $H = H_1 \times \dots \times H_n$ est une hypercohérence.
- Le domaine qualitatif avec cohérence $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ engendré par H est le domaine produit avec cohérence produit des $(\mathcal{D}_i, \mathcal{C}_i)_{i \leq n}$, i.e. :
 $\mathcal{D} = \{a \subseteq D_1 + \dots + D_n; \forall i \leq n \ p_i(a) \in \mathcal{D}_i\}$.
 $\mathcal{C} = \{A \subseteq_f^* \mathcal{D}; \forall i \leq n \ p_i^\bullet(A) \in \mathcal{C}_i\}$.

Preuve :

- Pour la première assertion il suffit de vérifier que la précohérence contient tous les singletons de la trame correspondante.
 Soit $\alpha \in D_1 + \dots + D_n$. Alors $\alpha = (\alpha_i, i)$ avec $\alpha_i \in D_i$ pour un entier $i \leq n$.
 Considérons $w = \{\alpha\}$. Alors pour tout entier $j \leq n$ tel que $j \neq i$ on a $p_j(w) = \emptyset$ et $p_i(w) = \{\alpha_i\} \in \cdot, \cdot$. Donc $w \in \cdot, \cdot$.
- 1. Soit $a \subseteq D_1 + \dots + D_n$ tel que pour tout $i \leq n \ p_i(a) \in \mathcal{D}_i$.
 Soit $a = \emptyset \in \mathcal{D}$. Sinon considérons $w \subseteq_f^* a$. Alors pour tout $i \leq n \ p_i(w) \subseteq_f^* p_i(a)$. Donc soit $p_i(w)$ est vide, soit $p_i(w) \in \cdot, \cdot$. Ce qui implique que $w \in \cdot, \cdot$.
- 2. Soit $a \subseteq D_1 + \dots + D_n$ tel que pour tout $w \subseteq_f^* a \ w \in \cdot, \cdot$.
 Montrons que pour tout $i \leq n \ p_i(a) \in \mathcal{D}_i$.
 Soit $p_i(a) = \emptyset \in \mathcal{D}_i$.
 Soit on a $u \subseteq_f^* p_i(a)$. Alors $\pi_i(u) \subseteq_f^* a$ donc $\pi_i(u) \in \cdot, \cdot$, et pour tout entier $j \neq i \ p_j(\pi_i(u)) = \emptyset$. Ainsi $p_i(\pi_i(u)) = u \in \cdot, \cdot$.
- 1. Soit $A \subseteq_f^* \mathcal{D}$ tel que pour tout $i \leq n \ p_i^\bullet(A) \in \mathcal{C}_i$.
 Montrons que $A \in \mathcal{C}$. Si $\emptyset \in A$ alors l'appartenance est évidente.
 Sinon soit $w \triangleleft_f A$. Il faut montrer que $w \in \cdot, \cdot$.
 S'il existe i et j deux entiers distincts et inférieurs ou égales à n tels que $p_i(w), p_j(w) \neq \emptyset$ alors $w \in \cdot, \cdot$.
 S'il existe un entier k fixé, $k \leq n$, tel que pour tout entier $i \leq n$ distinct de k on a $p_i(w) = \emptyset$ alors $p_k(w) \triangleleft_f p_k^\bullet(A)$ donc $p_k(w) \in \cdot, \cdot$ et $w \in \cdot, \cdot$.

2. Soit $A = \{a_1, \dots, a_p\} \subseteq_f^* \mathcal{D}$ tel que pour tout $w \triangleleft_f A$ $w \in , .$
 Montrons que $p_k^\bullet(A) = \{c_1, \dots, c_p\}$ avec $c_i = p_k(a_i)$ pour tout $i \leq p$ est dans \mathcal{C}_k ceci pour tout entier $k \leq p$.
 S'il existe $j \leq n$ tel que $c_j = \emptyset$ alors clairement $p_k^\bullet(A) \in \mathcal{C}_k$.
 Sinon soit $u \triangleleft_f p_k^\bullet(A)$ pour un entier $k \leq n$. Montrons que $u \in , k$.
 On a $\pi_k(u) \triangleleft_f A$ et pour tout entier $i \neq k$ $p_i(\pi_k(u)) = \emptyset$. Donc $p_k(\pi_k(u)) = u \in , k$.

□

On a une identification naturelle entre les points de \mathcal{D} , qui sont des sous-ensembles de $D_1 + \dots + D_n$, et les n-uples de $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$, le produit ensembliste : à $u \in \mathcal{D}$ correspond $(p_1(u), \dots, p_n(u))$.

2.6.4 La fonction $E\tilde{val}$

Quand on cherche à montrer que les hypercohérences et les fonctions fortement stables produisent des modèles fonctionnels du λ -calcul on doit montrer que la définition 2.2.1 est satisfaite dans ce cadre. Plus précisément cela revient à montrer que certaines fonctions sont fortement stables et pour cela on utilise la forte stabilité de la fonction $E\tilde{val}$.

Proposition 2.6.13 *Soient $H_1 = (D_1, , 1)$ et $H_2 = (D_2, , 2)$ deux hypercohérences. La fonction $E\tilde{val} : \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2) \times \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2$ définie par $E\tilde{val}(t, x) = f^t(x)$ est fortement stable relativement à $\mathcal{C}((H_1 \Leftrightarrow H_2) \times H_1)$ et \mathcal{C}_2 .*

Preuve : Vérifions tout d'abord que $E\tilde{val}$ est continue :

- Soit T filtrant dans $\mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ et $b \in \mathcal{D}_1$.

$$\begin{aligned} E\tilde{val}(\bigcup T, b) &= f^{\bigcup T}(b) \\ &= \bigcup_{t \in T} f^t(b) \text{ d'après le lemme 2.4.4} \\ &= \bigcup_{t \in T} E\tilde{val}(t, b) \end{aligned}$$
- Soit \mathcal{B} filtrant dans \mathcal{D}_1 et $t \in \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$.

$$\begin{aligned} E\tilde{val}(t, \bigcup \mathcal{B}) &= f^t(\bigcup \mathcal{B}) \\ &= \bigcup_{b \in \mathcal{B}} f^t(b) \text{ car } f^t \text{ est continue} \\ &= \bigcup_{b \in \mathcal{B}} E\tilde{val}(t, b) \end{aligned}$$

Montrons que $E\tilde{val}$ est fortement stable.

Soit $A = \{(t_1, b_1), \dots, (t_n, b_n)\} \subseteq \mathcal{D}(H_1 \Leftrightarrow H_2) \times \mathcal{D}_1$ tel que $(A)_1 \in \mathcal{C}(H_1 \Leftrightarrow H_2)$ et $(A)_2 \in \mathcal{C}_1$.

- $\Omega = \{(t_1, b_1), \dots, (t_n, b_n)\}$ est un recouvrement de $(A)_1$ et $(A)_2$, donc, d'après la proposition 2.6.10, $\{f^t(b); (t, b) \in \Omega\} = E\tilde{val}^\bullet(A) \in \mathcal{C}_2$.

- Posons $F = \{f^t \mid t \in (A)_1\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{Eval}(\bigwedge A) &= Eval(\bigcap(A)_1, \bigcap(A)_2) \\ &= f^{\bigcap(A)_1}(\bigcap(A)_2) \\ &= (\bigcap F)(\bigcap(A)_2) \text{ d'après le corollaire 2.4.5} \\ &= \bigcap \{f^t(x) \mid (t, x) \in \Omega\} \\ &= \bigcap \tilde{Eval}^\bullet(A) \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.6.14 *La fonction Eval de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS} \times \mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$ définie par $Eval(f, x) = f(x)$ est fortement stable.*

□

Proposition 2.6.15 *Les fonctions $Comp_n$, pour tout $n \geq 1$, de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ vers $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ définie par $Comp_n(f) = f^n$ sont des fonctions fortement stables.*

Preuve : Montrons d'abord la croissance des fonctions $Comp_n$.

Soient $f, g \in [H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ telles que $f \leq_s g$. On montre par induction sur n que $f^n \leq_s g^n$.

Si $n = 1$ le résultat est évident.

si $n = p + 1$. On veut montrer que pour $x, y \in \mathcal{D}(H_1)$, tels que $x \leq y$, on a $f^n(x) = f^n(y) \wedge g^n(x)$.

Par hypothèse d'induction on a $f^p(x) = f^p(y) \wedge g^p(x)$ pour $x \leq y$.

Par croissance on a :

$$f^n(y) \leq f^p(g(y)) \quad (1);$$

$$f^n(y) \leq g(f^p(y)) \quad (2);$$

$$\text{et } f^n(x) \leq f^n(y) \quad (3).$$

Et $f^n(x) = f(f^p(y) \wedge g^p(x))$ avec $\{f^p(y), g^p(x)\} \sqsubseteq \{g^p(y)\} \in \mathcal{C}(H_2)$ ce qui entraîne, puisque f est fortement stable, que :

$$f(f^p(y) \wedge g^p(x)) = f^n(y) \wedge f(g^p(x)) \quad (4).$$

Il vient que $f^n(y) \wedge g^n(x) = f^n(y) \wedge f^p(g(y)) \wedge g(f^p(y)) \wedge g^n(x)$ par (3) et (4)

$$= f^n(x) \wedge f^p(g(y)) \quad \text{par (1)}$$

$$= f^n(x) \quad \text{par (2)}$$

Soit $F \subseteq [H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ un ensemble filtrant pour l'ordre \leq_s .

Montrons par induction sur n que $(\bigsqcup F)^n = \bigsqcup_{f \in F} f^n$. Le lemme 2.4.4 nous dit que $\bigsqcup F$

est une fonction fortement stable définie par $\bigsqcup F(x) = \bigcup_{f \in F} f(x)$.

Si $n = 1$ le résultat est évident.

Si $n = p + 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\bigsqcup F)^n(x) &= (\bigsqcup F)^p((\bigsqcup F)(x)) \\
&= (\bigsqcup F)^p\left(\bigcup_{f \in F} f(x)\right) \quad \text{d'après le lemme 2.4.4} \\
&= \bigcup_{f \in F} ((\bigsqcup F)^p)(f(x)) \quad \text{car } \{f(x); f \in F\} \text{ est filtrant dans } \mathcal{D}(H_2) \text{ et} \\
&\hspace{15em} \text{la fonction } (\bigsqcup F)^p \text{ est continue} \\
&= \bigcup_{f \in F} \left(\bigsqcup_{f \in F} f^p\right)(f(x)) \quad \text{car par hypothèse d'induction } Comp_p \text{ est continue.} \\
&= \bigcup_{f \in F} f^p(f(x)) \quad \text{car d'après la croissance de } Comp_p \text{ l'ensemble } \{f^p; f \in F\} \\
&\hspace{15em} \text{est filtrant} \\
&= \bigcup_{f \in F} f^n(x)
\end{aligned}$$

Soient $F = \{f_1, \dots, f_l\}$ un ensemble cohérent de fonctions de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$ et $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{C}(H_1)$. Alors $Comp_n^\bullet(F) = \{f_1^n, \dots, f_l^n\}$.

Soit Ω un recouvrement de $Comp_n^\bullet(F)$ et de A .

Il faut vérifier que $\{g(x); (g, x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}(H_2)$.

Or $\{g(x); (g, x) \in \Omega\} = \{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\}$ où Ω' est un recouvrement de F et A .

Montrons par induction sur n que $\{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\} \in \mathcal{C}(H_2)$, ceci pour tout recouvrement Ω' de F et A .

Si $n = 1$ le résultat est immédiat car F est un ensemble de fonctions cohérentes et $A \in \mathcal{C}(H_1)$.

Si $n = p + 1$, on a $\{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\} = \{f(f^p(x)); (f, x) \in \Omega'\}$. Posons $W = \{(f_1, f_1^p(a_1)), \dots, (f_1, f_1^p(a_m)), \dots, (f_l, f_l^p(a_1)), \dots, (f_l, f_l^p(a_p))\}$ un recouvrement de F et de l'ensemble $B = \{f^p(x); (f, x) \in \Omega''\}$, où Ω'' est un recouvrement de F et A .

Par hypothèse d'induction on a $B \in \mathcal{C}(H_2)$. Ainsi $W \subseteq_f^* [H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS} \times \mathcal{D}(H_2)$ est dans la cohérence produit, voir la proposition 2.6.12. La fonction $Eval$ étant fortement stable, il vient que $Eval^\bullet(W) = \{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\} \in \mathcal{C}(H_2)$.

Montrons enfin que $\bigcap \{g(x); (g, x) \in \Omega\} = \bigcap Comp_n^\bullet(F)(\bigcap A)$.

On a $\bigcap \{g(x); (g, x) \in \Omega\} = \bigcap \{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\}$.

Soit V le recouvrement de $Comp_n^\bullet(F)$ et de A suivant :

$$V = \{(f_1^n, a_1), \dots, (f_l^n, a_1), \dots, (f_1^n, a_m), \dots, (f_l^n, a_m)\}.$$

D'après ce que l'on vient de voir $Comp_n^\bullet(F)$ et dans la cohérence de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$, et donc V est dans la cohérence de $[H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS} \times \mathcal{D}(H_1)$. La forte stabilité de la fonction $Eval$ donne :

$$\bigcap \{f^n(x); (f, x) \in \Omega'\} = \bigcap Eval^\bullet(V) = Eval(\bigcap V) = \bigcap Comp_n^\bullet(F)(\bigcap A).$$

□

2.7 Sous structures et unions croissantes

Les notions introduites ici sont indispensables à la construction de i -modèles fortement stables.

On vérifie d'abord que si on a une suite d'hypercohérences $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n , H_n est une sous structure de H_{n+1} , alors la réunion de ces H_n est une hypercohérence. De plus on vérifie qu'alors la suite $(H_n \Leftrightarrow H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également une suite croissante pour la relation de sous structure. On verra que dans la construction des analogues fortement stables des modèles de Scott et des modèles de Park interviendra une telle suite.

Définition 2.7.1 Soient $H_1 = (D_1, \cdot_1)$, $H_2 = (D_2, \cdot_2)$ deux hypercohérences.

On dit que H_1 est une sous structure H_2 , ce qui se note $\mathbf{H}_1 \preceq \mathbf{H}_2$, si $D_1 \subseteq D_2$ et $\cdot_1 = \cdot_2 \cap \mathcal{P}(D_1)$.

Proposition 2.7.2 Soient H_1 et H_2 deux hypercohérences telles que $H_1 \preceq H_2$. Alors :

- $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$.
- $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P}(D_1)$.

Preuve : Soit $x \in \mathcal{D}_1$. Si $x = \emptyset$ alors $x \in \mathcal{D}_2$. Si $x \neq \emptyset$, soit $u \subseteq_f^* D_2$ tel que $u \subseteq x$, alors $u \in \cdot_1 \subseteq \cdot_2$.

Soit $A \in \mathcal{C}_1$. On a $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq_f^* \mathcal{D}_1$ donc $A \subseteq_f^* \mathcal{D}_2$. Si $\emptyset \in A$ alors $A \in \mathcal{C}_2$. Sinon considérons $u \triangleleft_f A$, alors $u \subseteq a_1 \cup \dots \cup a_n$ ce qui entraîne que $u \in \cdot_1 \subseteq \cdot_2$; donc $A \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P}(D_1)$. L'autre inclusion se montre similairement.

□

Proposition 2.7.3 Si $H_1 \preceq H'_1$ et $H_2 \preceq H'_2$. Alors $H_1 \Leftrightarrow H_2 \preceq H'_1 \Leftrightarrow H'_2$.

Preuve : Montrons que $\cdot_1 (H_1 \rightarrow H_2) = \cdot_1 (H'_1 \rightarrow H'_2) \cap \mathcal{P}(D_{1c} \times D_2)$.

Soit $w \in \cdot_1 (H_1 \rightarrow H_2)$.

Alors $w \in \mathcal{P}(D_{1c} \times D_2)$. Et si $(w)_1 \in \mathcal{C}'_1$ on a $(w)_1 \in \mathcal{C}_1$ d'après l'hypothèse et la proposition précédente, donc $(w)_2 \in \cdot_2 \subseteq \cdot_2^{\prime 1}$. De plus si $(w)_1 \in \mathcal{C}_2^{\prime 1}$ alors $(w)_2 \in \cdot_2^{\prime 1}$.

Soit $w \in \mathcal{P}(D_{1c} \times D_2) \cap \cdot_1 (H'_1 \rightarrow H'_2)$.

Supposons que $(w)_1 \in \mathcal{C}_1$ alors $(w)_1 \in \mathcal{C}'_1$ d'où $(w)_2 \in \cdot_2$. Il vient, d'après l'hypothèse, que $(w)_1 \in \cdot_2$. De même si $(w)_1 \in \mathcal{C}_1^{\prime 1}$ alors $(w)_2 \in \cdot_2^{\prime 1}$.

□

Proposition 2.7.4 Soit $(H_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'hypercohérences, pour la relation \preceq . Soit $H = \bigcup_{n \geq 0} H_n$ l'hypercohérence ayant pour trame $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ et pour précohérence $\cdot = \bigcup_{n \geq 0} \cdot_n$. Alors $\mathcal{D}_c = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_{nc}$ et $\mathcal{C}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}_{nf}$.

Preuve :

- Soit $x = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in \mathcal{D}_c$. Puisque $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ il existe n_1, \dots, n_p tels que l'on ait $\alpha_1 \in D_{n_1}, \dots, \alpha_p \in D_{n_p}$. Alors $x \in \mathcal{D}_{nc}$ dès que $n \geq n_1, \dots, n_p$. L'autre inclusion est évidente.
- Soit $A = \{a_1, \dots, a_p\} \in \mathcal{C}_f$. Puisque $\mathcal{D}_c = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_{nc}$ il existe n_1, \dots, n_p tels que $a_1 \in \mathcal{D}_{n_1}, \dots, a_p \in \mathcal{D}_{n_p}$. Donc $A \subseteq_f^* \mathcal{D}_{nc}$ dès que $n \geq n_1, \dots, n_p$. Soit $u \subseteq_f^* D_n$ tel que $u \triangleleft A$. Alors $u \in \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{P}(D_n) = \mathcal{D}_{nf}$, donc $A \in \mathcal{C}_{nf}$. L'autre sens est immédiat.

□

Corollaire 2.7.5 $H \Leftrightarrow H = \bigcup_{n \geq 0} (H_n \rightarrow H_n)$ et $(H \rightarrow H) = \bigcup_{n \geq 0} (H_n \rightarrow H_n)$

Preuve : Découle directement de la proposition 2.7.3.

□

2.8 Morphismes d'hypercohérences

La notion de morphisme d'hypercohérence est l'outil principal utilisé dans la construction d'un i -modèle fortement stable. Dans le paragraphe suivant on montre que la donnée d'une hypercohérence et d'un morphisme d'hypercohérence de $H \Leftrightarrow H$ vers H détermine un i -modèle. Pratiquement, pour construire une telle hypercohérence et un tel morphisme on utilise les notions de sous structure et de suite croissante d'hypercohérences.

Remarque importante :

Il est à noter que nous utilisons ici une notion de morphisme d'hypercohérence au niveau des trames. Dans la catégorie des hypercohérences et des fonctions fortement stables définie par Ehrhard dans [26], les morphismes sont au niveau des QDC engendrés par les hypercohérences.

Définition 2.8.1 Soient H_1 et H_2 deux hypercohérences.

Un **morphisme d'hypercohérence** de H_1 dans H_2 est une application **injective** θ de D_1 dans D_2 telle que $u \in \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \theta^\bullet(u) \in \mathcal{D}_2$.

Remarque : $H_1 \preceq H_2$ si et seulement si l'inclusion est un morphisme.

Définition 2.8.2 Soit θ une application de D vers D' . On pose $\theta(\mathbf{H}) = (\theta^\bullet(D), \theta^{\bullet\bullet}(\cdot, \cdot))$.

Lemme 2.8.3 Si θ est un morphisme de H_1 vers H_2 et si $H'_1 \preceq H_1$ alors $\theta(H'_1) \preceq H_2$.

Dem : Directe.

Un morphisme d'hypercohérence θ de H_1 vers H_2 détermine deux applications θ^\bullet et $\theta^{\bullet-}$ telles que le couple $(\theta^\bullet, \theta^{\bullet-})$ forme une embedding projection pair de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$. Ceci explique pourquoi on peut se contenter de rester au niveau des hypercohérences et des morphismes d'hypercohérence lors de la construction de modèles.

Lemme 2.8.4 *Soit θ un morphisme d'hypercohérence de H_1 dans H_2 . Notons $\theta^{\bullet-}$ l'application de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 définie par : $\theta^{\bullet-}(b) = \{\alpha ; \theta(\alpha) \in b\}$. Alors :*

- (i) $\theta^\bullet \in [H_1 \Leftrightarrow H_2]_{FS}$;
- (ii) $\theta^{\bullet-} \in [H_2 \Leftrightarrow H_1]_{FS}$;
- (iii) $\theta^{\bullet-} \circ \theta^\bullet$ est l'identité sur \mathcal{D}_1 et $\theta^\bullet \circ \theta^{\bullet-} \leq id_{\mathcal{D}_2}$;
- (iv) $\theta^\bullet \circ \theta^{\bullet-}$ est l'identité sur \mathcal{D}_2 ssi θ est un isomorphisme.

Preuve (i) Il est facile de vérifier que $\theta^\bullet(a) \in \mathcal{D}_2$ pour tout $a \in \mathcal{D}_1$, que θ^\bullet est continue, et que $\theta^\bullet(\cap A) = \cap \theta^{\bullet\bullet}(A)$, pour tout $A \in \mathcal{C}_1$. Reste à montrer que $A \in \mathcal{C}_1$ implique $\theta^{\bullet\bullet}(A) \in \mathcal{C}_2$. Si $\emptyset \in \theta^{\bullet\bullet}(A)$, le résultat est évident, puisqu'il n'y a pas de multisection de A . Sinon, soit $u \subseteq_f^* \mathcal{D}_2$ tel que $u \triangleleft \theta^{\bullet\bullet}(A)$. Alors u appartient à l'image de θ^\bullet . De plus θ^\bullet est injective, puisque θ l'est. Il y a donc un unique $v \subseteq_f^* \mathcal{D}_1$ tel que $u = \theta^\bullet(v)$, et il est clair que $v \triangleleft A$. On a donc $v \in \cdot_1$, et, θ étant un morphisme d'hypercohérence, $u \in \cdot_2$. (ii) Contentons nous de montrer que $\theta^{\bullet-}(b) \in \mathcal{D}_1$, pour tout $b \in \mathcal{D}_2$. Si $b = \emptyset$, alors $\theta^{\bullet-}(b) = \emptyset \in \mathcal{D}_1$. Sinon, soit $u \subseteq_f^* \mathcal{D}_1$ tel que $u \subseteq \theta^{\bullet-}(b)$; θ étant injectif, on a $\theta^\bullet(u) \subseteq_f^* b$, et donc $\theta^\bullet(u) \in \cdot_2$. On en déduit $u \in \cdot_1$, puisque θ est un morphisme d'hypercohérence.

Les deux derniers points sont immédiats.

□

2.9 β -modèles et i -modèles fortement stables

Nous montrons maintenant qu'on peut adapter aux hypercohérences la technique de construction de modèles développée par Krivine dans le cadre continu et stable [47]. Rappelons qu'il s'agit d'une construction qui n'utilise pas les limites inverses, et dans laquelle on code non pas les fonctions (continues, stables ou fortement stables), mais les traces (continues ou stables).

Dans ce qui suit \mathcal{F} et \mathcal{F}^∞ seront toujours supposés être respectivement $[H \Leftrightarrow H]_{FS}$ et $[\mathcal{D}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$ où H est une hypercohérence et $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ le QDC engendré par H .

Proposition 2.9.1 *Pour tout triplet (H, F, G) où H est une hypercohérence, G une application fortement stable de $H \Rightarrow H$ vers $\mathcal{D}(H)$ et F une application fortement stable de $\mathcal{D}(H)$ vers $H \Rightarrow H$, le uple $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{F}^\infty, \Phi, \Psi)$, où $\Phi = tr^{-1} \circ F$ et $\Psi = G \circ tr$, est un modèle fonctionnel.*

C'est un β -modèle dès que $F \circ G$ est l'identité sur $\mathcal{D}(H \Leftrightarrow H)$.

C'est un β -modèle extensionnel si et seulement si $G \circ F$ est l'identité sur $\mathcal{D}(H)$.

Nous montrons que $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{F}^\infty, \Phi, \Psi)$ est un β -fonctionnel en utilisant librement les faits 2.5.6.

Il est clair que \mathcal{F}^∞ contient les c_i ; \mathcal{F} contient $f_{i,\bar{d}}$ car cette fonction est la composée $f \circ h$ des deux fonctions fortement stables f et $h : x \mapsto (d_1, \dots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \dots, d_n)$.

Supposons que f, g soient deux fonctions fortement stables de $\mathcal{D}^n \Leftrightarrow \mathcal{D}$ et soit $h : \mathcal{D}^n \Leftrightarrow \mathcal{D}$ définie par $h(\bar{d}) = \Phi(f(\bar{d}))(g(\bar{d}))$. On a $h(\bar{d}) = E\tilde{v}al(\Phi \circ f(\bar{d}), g(\bar{d}))$ donc $h = E\tilde{v}al \circ T$ où $T(\bar{d}) = (\Phi \circ f(\bar{d}), g(\bar{d}))$. Or $\Phi \circ f$ est la composée de deux fonctions fortement stables, T est fortement stable car $\Phi \circ f$ et g le sont, enfin h est la composée de $E\tilde{v}al$ et T .

Il reste à voir que $h : \bar{d} \mapsto \Psi(f_{i,\bar{d}}) = G \circ tr(f_{i,\bar{d}})$ est fortement stable si $f : \mathcal{D}^n \Leftrightarrow \mathcal{D}$ l'est.

Nous savons déjà que pour tous i, \bar{d} , $f_{i,\bar{d}}$ est fortement stable.

Plaçons nous dans le cas où $n = 2$ et $i = 1$ et considérons la fonction $h : d \mapsto \Psi(f_d)$ où $f_d : x \mapsto f(x, d)$.

Comme G est fortement stable il nous suffit de montrer que la fonction $L : d \mapsto tr(f_d)$ est fortement stable.

1. Montrons que L est continue. Comme tr commute aux sup dirigés il nous suffit de montrer que si $A \subseteq \mathcal{D}$ est filtrant alors $\{f_d / d \in A\}$ est filtrant pour l'ordre stable et qu'il admet un sup qui est une fonction fortement stable. Le deuxième point découle du premier et du lemme 2.4.4.

Pour montrer le premier point il suffit de montrer que la fonction $\epsilon : d \mapsto f_d$ est croissante, c'est à dire que $d \subseteq d' \Rightarrow f_d \leq_s f_{d'}$.

Soient $x \leq x'$, a-t-on $f(x, d) = f(x', d) \cap f(x, d')$?

Or $(x, d) = \sqcap \{(x, d'), (x', d)\}$ avec $\{x, x'\} \sqsubseteq \{x'\}$ et $\{d, d'\} \sqsubseteq \{d'\}$.

Ceci entraîne, f étant fortement stable, que $f(x, d) = f(\sqcap \{(x, d'), (x', d)\}) = f(x', d) \cap f(x, d')$.

2. Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}$.

- Montrons que $L^\bullet(A) \in \mathcal{C}(H \Leftrightarrow H)$ c'est à dire que $W = \{f_{a_1}, \dots, f_{a_n}\}$ est un ensemble cohérent de fonctions (voir la proposition 2.6.10).

Soient $B \in \mathcal{C}$ et Ω un recouvrement de W, B .

$$\begin{aligned} \{g(b); (g, b) \in \Omega\} &= \{f(b, a); (b, a) \in \Omega'\} \quad \text{où } \Omega' \text{ recouvre } B \text{ et } A \\ &= f^\bullet(\Omega') \in \mathcal{C} \quad \text{car } \Omega' \in \mathcal{C}(H \times H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \bigcap \{g(b); (g, b) \in \Omega\} &= \bigcap f^\bullet(\Omega') \\ &= f(\bigcap \Omega') \\ &= f(\bigcap B, \bigcap A) \\ &= f(\bigcap \{(\bigcap B, a_1), \dots, (\bigcap B, a_n)\}) \\ &= \bigcap f^\bullet\{(\bigcap B, a_1), \dots, (\bigcap B, a_n)\} \quad \text{car } A, \{\bigcap B\} \in \mathcal{C} \\ &= f(\bigcap B, a_1) \cap \dots \cap f(\bigcap B, a_n) \\ &= f_{a_1}(\bigcap B) \cap \dots \cap f_{a_n}(\bigcap B) = \bigcap W(\bigcap B). \end{aligned}$$

- Il nous reste à montrer que $L(\bigcap A) = \bigcap L^\bullet(A)$.
 Par croissance on a $L(\bigcap A) \subseteq \bigcap L^\bullet(A)$.
 Montrons que $\bigcap L^\bullet(A) = \bigcap \{tr(f_{a_1}), \dots, tr(f_{a_n})\} \subseteq L(\bigcap A) = tr(f_{\bigcap A})$.
 Soit $(a, \alpha) \in \bigcap \{tr(f_{a_1}), \dots, tr(f_{a_n})\}$ alors $\alpha \in f(a, a_1), \dots, \alpha \in f(a, a_n)$ et a est minimal pour ces propriétés.
 Du fait que $A \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\{(x, a_1), \dots, (x, a_n)\} \in \mathcal{C}^2$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
 Ainsi, puisque f est fortement stable on a $\alpha \in f(a, a_1) \cap \dots \cap f(a, a_n)$ si et seulement si $\alpha \in f(a, \bigcap A)$. Il reste à vérifier que a est minimal pour cette propriété, ce qui nous certifiera que $(a, \alpha) \in tr(f_{\bigcap A})$.
 Considérons $b \in \mathcal{D}$ tel que $b \subsetneq a$. Si $\alpha \in f(b, \bigcap A)$ on a $\alpha \in f(b, a_i)$ pour tout $i \leq n$ ce qui contredit le fait que $(a, \alpha) \in tr(f_{a_i})$.
 Ainsi $\bigcap L^\bullet(A) \subseteq L(\bigcap A)$.

□

Montrons maintenant que la donnée de H et d'un morphisme d'hypercohérence de $H \Leftrightarrow H$ vers H détermine un λ -modèle régulier fortement stable.

Théorème 2.9.2 *Etant donnée une hypercohérence $H = (D, ,)$, tout morphisme d'hypercohérence i de $H \Leftrightarrow H$ vers H détermine un λ -modèle régulier (\mathcal{D}, F, G) , où F et G sont définis par :*

$$F(a) = \{(h, \alpha) ; i(h, \alpha) \in a\}, \text{ pour tout } a \in \mathcal{D}, \text{ et}$$

$$G(Tr(f)) = \{i(h, \alpha) ; (h, \alpha) \in Tr(f)\}, \text{ pour tout } f \in [H \Leftrightarrow H]_{FS}.$$

Et on a $(F(a))(b) = \{\alpha \in D ; \exists h \subseteq b, i(h, \alpha) \in a\}$, pour tous $a, b \in \mathcal{D}$.

De plus, \mathcal{D} est extensionnel ssi i est un isomorphisme.

Preuve : Le lemme 2.8.4 nous permet d'affirmer que $G = i^\bullet$ et $F = i^{\bullet-}$ satisfont les hypothèses de la proposition 2.9.1. On est donc en présence d'un β -modèle, qui est extensionnel si i est surjective.

De plus : $(u)v = \Phi(u)(v) = tr^{-1}(F(u))(v) = tr^{-1}\{(a, \alpha) ; i(a, \alpha) \in u\}(v)$.

Or, pour tout $T \in H \Rightarrow H$, $tr^{-1}(T)(v) = \{\alpha ; \exists a \subseteq v \text{ tel que } (a, \alpha) \in T\}$.

Ainsi $(u)v = tr^{-1}\{(a, \alpha) ; i(a, \alpha) \in u\}(v) = \{\alpha \in D ; \exists a \subseteq v \text{ } i(a, \alpha) \in u\}$ ceci pour tout $u, v \in \mathcal{D}$.

Enfin pour toute fonction $f \in [H \Leftrightarrow H]_{FS}$ on a $\lambda x f(x) = G(tr(f)) = G\{(a, \alpha) ; a \in \mathcal{D}_c, \alpha \in f(a) \text{ et, } \forall a' \subsetneq a, \alpha \notin f(a')\} = \{i(a, \alpha) ; a \in \mathcal{D}_f, \alpha \in f(a) \text{ et, } \forall a' \subsetneq a \alpha \notin f(a')\}$.

□

Définition 2.9.3 *Nous appellerons dorénavant **i -modèle fortement stable** tout modèle régulier déterminé par la donnée d'une hypercohérence H et d'un morphisme d'hypercohérence i qui va de $H \Leftrightarrow H$ vers H . La paire (H, i) est appelée **paire hypercohérente**.*

2.10 Construction élémentaire de i -modèles fortement stables

On présente ici en détail les constructions de deux (classes de) i -modèles fortement stables, respectivement les analogues fortement stables des modèles de Scott et des modèles de Park.

Un modèle de Park fortement stable particulier, celui où l'ensemble d'atome de départ est réduit à un singleton, est utilisé dans la preuve de l'incomplétude des modèles stables donnée dans le chapitre suivant.

2.10.1 Les modèles \mathcal{D}_∞ fortement stables

Les modèles de Scott [64] ont été initialement donné dans la sémantique continue. On trouve la construction de leurs analogues stables dans [47].

On se donne un ensemble A , non vide, fini ou dénombrable, et dont aucun élément n'est un couple. Nous définissons simultanément l'ensemble, Δ , et une bijection j de $\mathcal{P}_f(\Delta) \times \Delta$ dans Δ par :

Chaque $\alpha \in A$ est une formule.

Si $h \in \mathcal{P}_f(\Delta)$ et $\alpha \in \Delta$, et si $(h, \alpha) \neq (\emptyset, \alpha)$ avec $\alpha \in A$, alors $(h, \alpha) \in \Delta$ et $j(h, \alpha) = (h, \alpha)$.

Enfin, nous posons $j(\emptyset, \alpha) = \alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

On définit sur Δ une notion de rang :

- $rg \alpha = 0$ si $\alpha \in A$.
- $rg (a, \alpha) = \sup(\{rg \gamma, \gamma \in a\}, rg \alpha) + 1$.

Δ_n sera l'ensemble des formules de rang $\leq n$.

On va maintenant construire par induction sur n une suite croissante, pour la relation \preceq , $(H_n)_{n \geq 0}$ d'hypercohérences telle que, pour tout entier n , $D_n \subseteq \Delta_n$ et telle que la restriction i_n de j à $(\mathcal{D}_n)_c \times D_n$ est un isomorphisme d'hypercohérence de $H_n \rightarrow H_n$ sur H_{n+1} . (On abrège $\mathcal{D}(H_n)$ en \mathcal{D}_n , (H_n) en $,_n$, et on note D_n la trame de \mathcal{D}_n .)

On appellera H l'hypercohérence $\bigcup_{n \geq 0} H_n$ (cf. proposition 2.7.4).

- H_0 est n'importe quelle hypercohérence de trame A .
- $D_{n+1} = j^\bullet((\mathcal{D}_n)_c \times D_n)$
- $,_{n+1} = \{j^\bullet(a); a \in ,_n, (H_n \rightarrow H_n)\}$

Lemme 2.10.1 *Pour tout entier n $H_n \preceq H_{n+1}$.*

Preuve:

1. Montrons que $H_0 \preccurlyeq H_1$.

- Il est clair que $D_0 \subseteq D_1$.

- Montrons que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}(D_0) = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P}(A)$.

On remarque que puisque A ne contient pas de couple et que j est injective, si $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq A$ alors $v = \{(\emptyset, \alpha_1), \dots, (\emptyset, \alpha_n)\}$ est l'unique $v \subseteq \Delta^* \times \Delta$ tel que $j^\bullet(v) = u$. On remarque également que $u \in \mathcal{C}_1$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}_1$ ($H_0 \rightarrow H_0$).

Comme $(v)_1 = \{\emptyset\} \in \mathcal{C}_0$ et $(v)_2 = u$, il vient de la définition de \mathcal{C}_1 ($H_0 \rightarrow H_0$) que $u \in \mathcal{C}_1$ si et seulement si $(v)_2 = u \in \mathcal{C}_0$.

2. On suppose maintenant que $H_{n-1} \preccurlyeq H_n$. Montrons que $H_n \preccurlyeq H_{n+1}$.

De la proposition 2.7.3 on déduit que $H_{n-1} \Leftrightarrow H_{n-1} \preccurlyeq H_n \Leftrightarrow H_n$. Comme i_n est un isomorphisme de $H_n \Leftrightarrow H_n$ sur H_{n+1} et que $i_{n-1} = i_n / \mathcal{D}(H_{n-1} \rightarrow H_{n-1})$ on a, d'après le lemme 2.8.2, que $i_{n-1}(H_{n-1} \Leftrightarrow H_{n-1}) \preccurlyeq i_n(H_n \Leftrightarrow H_n)$ soit $H_n \preccurlyeq H_{n+1}$.

□

Corollaire 2.10.2 $i = \bigcup_{n \geq 0} i_n$ est un isomorphisme entre $H \Leftrightarrow H$ et H .

dem : Application immédiate du corollaire 2.7.5 et du fait que, pour tout n , $i / \mathcal{D}_{n_c \times D_n} = i_n$ est un isomorphisme d'hypercohérence de $H_n \Leftrightarrow H_n$ sur H_{n+1} .

□

Corollaire 2.10.3 \mathcal{D} est un β -modèle extensionnel.

dem : Application immédiate du corollaire précédent et du théorème 2.9.2.

□

2.10.2 Les modèles de Park fortement stables

Les modèles de Park [55] ont été initialement défini dans le cadre de la sémantique continue. Leur construction est une variante de celle des modèles \mathcal{D}_∞ de Scott, mais ils ont une théorie équationnelle très différente (les modèles sont non semi-sensibles). Ces modèles ont des analogues stables (qui ont été défini par Honsell et Ronchi [36]), et des analogues fortement stables que nous construisons maintenant.

La construction est analogue à celle des modèles de Scott. La seule différence est dans la construction de la bijection de $\mathcal{P}_f(\Delta) \times \Delta$ dans Δ , on identifie maintenant, pour tout atome α , le couple $(\{\alpha\}, \alpha)$ à α .

On se donne un ensemble A , non vide, fini ou dénombrable, et dont aucun élément n'est un couple. Nous définissons simultanément l'ensemble, Δ , et une bijection j de $\mathcal{P}_f(\Delta) \times \Delta$ dans Δ par :

Chaque $\alpha \in A$ est une formule.

Si $h \in \mathcal{P}_f(\Delta)$ et $\alpha \in \Delta$, et si $(h, \alpha) \neq (\{\alpha\}, \alpha)$ avec $\alpha \in A$, alors $(h, \alpha) \in \Delta$ et $j(h, \alpha) = (h, \alpha)$.

Enfin, nous posons $j(\{\alpha\}, \alpha) = \alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

On appellera H l'hypercohérence $\bigcup_{n \geq 0} H_n$ (cf. proposition 2.7.4) où la suite H_n est définie par :

- H_0 est l'hypercohérence de trame A et de précohérence $,_0 = \mathcal{P}_f^*(A)$.
- $D_{n+1} = j^\bullet((\mathcal{D}_n)_c \times D_n)$
- $,_{n+1} = \{j^\bullet(h) ; h \in ,_n (H_n \rightarrow H_n)\}$

Lemme 2.10.4 $H_n \preceq H_{n+1}$, pour tout entier n .

Preuve Montrons d'abord que $H_0 \preceq H_1$. Il est clair que $D_0 \subseteq D_1$. Il reste à voir que $,_0 = ,_1 \cap \mathcal{P}(D_0)$ ($= ,_1 \cap \mathcal{P}(A)$). Comme $,_0 \subseteq \mathcal{P}(A)$, il suffit d'établir que pour tout $h \in \mathcal{P}(A)$, on a $h \in ,_0 \Leftrightarrow h \in ,_1$.

Soit donc $h = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq A$. Comme A ne contient pas de couple et que j est injective, $\{(\{\alpha_1\}, \alpha_1), \dots, (\{\alpha_n\}, \alpha_n)\}$ est l'unique $k \subseteq \mathcal{P}_f(\Delta) \times \Delta$ tel que $j^\bullet(k) = h$. D'autre part, on a $h \in ,_1$ si et seulement si $k \in ,_1 (H_0 \rightarrow H_0)$ (par définition de $,_1$). De plus $(k)_1 = \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\} \in \mathcal{C}_0$. En effet, la seule multisection de cet ensemble est $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et elle appartient à $,_0$, puisque $,_0 = \mathcal{P}_f^*(A)$. Comme $(k)_2 = h$, il vient de la définition de $,_1 (H_0 \rightarrow H_0)$ que $h \in ,_1$ si et seulement si $(k)_2 = h \in ,_0$.

Supposons maintenant que $H_{n-1} \preceq H_n$ et montrons que $H_n \preceq H_{n+1}$. On a $H_{n-1} \Leftrightarrow H_{n-1} \preceq H_n \Leftrightarrow H_n$, d'après la proposition 2.7.3. Comme i_n est un isomorphisme de $H_n \Leftrightarrow H_n$ sur H_{n+1} et que $i_{n-1} = i_n /_{\mathcal{D}(H_{n-1} \rightarrow H_{n-1})}$, on a $i_{n-1}(H_{n-1} \Leftrightarrow H_{n-1}) \preceq i_n(H_n \Leftrightarrow H_n)$, soit $H_n \preceq H_{n+1}$.

□

On vérifie ensuite facilement que $i = \bigcup_{n \geq 0} i_n$ est un isomorphisme entre $H \Leftrightarrow H$ et H .

Ainsi \mathcal{D} est un λ -modèle extensionnel. C'est la version fortement stable du modèle de Park.

Remarques

1. Le modèle de Park stable se construit dans le cadre des espaces cohérents de Girard, en faisant les mêmes identifications (cf. [36]).
2. Noter que pour \mathcal{D}_∞ fortement stable on peut choisir une précohérence arbitraire sur A , alors que pour le modèle de Park fortement stable il est nécessaire de choisir la précohérence maximale sur A .

2.10.3 Paires hypercohérentes partielles et complétion hypercohérente

Cette section ne sera utilisée que dans l'annexe B.

Nous proposons une adaptation aux paires hypercohérentes des notions de paires partielles et de complétion, introduites dans [44] dans le cadre des modèles de graphes et des i -modèles stables. Les définitions dans le cadre des modèles de graphes ont été données dans le chapitre précédent page 34.

Toute paire hypercohérente (H, i) peut se voir comme la complétion d'une ou plusieurs paires partielles (H_0, i_0) . D'autre part on peut compléter de façon canonique une paire partielle (H_0, i_0) de façon à obtenir une paire hypercohérente (H, i) telle que $H_0 \preceq H$ et $i|_{H_0} = i_0$.

La construction donnée dans cette section constitue une méthode générale pour obtenir des i -modèle fortement stable. Les deux constructions particulières que l'on a données dans les deux sous sections précédentes en sont des cas particuliers.

Définition 2.10.5 *Un morphisme d'hypercohérence partiel de $H_1 = (D_1, \cdot, \cdot)$ vers $H_2 = (D_2, \cdot, \cdot)$ est une injection partielle i_0 de D_1 vers D_2 telle que :*
pour tout $u \in \text{Dom}(i_0)$, $u \in \cdot, \cdot \Leftrightarrow i_0^\bullet(u) \in \cdot, \cdot$.

Définition 2.10.6 *Une paire hypercohérente partielle est un couple (H_0, i_0) où i_0 est un morphisme d'hypercohérence partiel de $H_0 \Leftrightarrow H_0$ vers H_0 . Une paire hypercohérente partielle (H_0, i_0) est une restriction d'une paire hypercohérente ssi $H_0 \preceq H$ et $i|_{H_0} = i_0$. On dit que (H, i) étend la paire (H_0, i_0) . Pour deux paires hypercohérentes partielles (H_0, i_0) et (H_1, i_1) qui sont des restrictions d'une paire (H, i) on pose $(H_0, i_0) \preceq (H_1, i_1)$ ssi $H_0 \preceq H_1$.*

La relation \preceq sur les restrictions d'une même paire est une relation d'ordre puisque i_0 et i_1 sont les restrictions de i sur H_0 et H_1 .

Le but maintenant est de construire de façon canonique, à partir d'une paire hypercohérente partielle (H_0, i_0) , une paire hypercohérente (H, i) telle que $(H_0, i_0) \preceq (H, i)$. La **paire (H, i) est la complétion de (H_0, i_0)** .

On considère dorénavant la paire hypercohérente partielle (H_0, i_0) où H_0 est l'hypercohérence (A_0, \cdot, \cdot) . Pour que l'on puisse compléter (H_0, i_0) nous avons besoin que cette paire partielle vérifie le fait que $(\mathcal{D}(H_0)_c \times A \setminus \text{Dom}(i_0)) \cap A = \emptyset$. On dira alors que la paire partielle est **complétable**.

Lemme 2.10.7 *Soit $(H_0 = (D_0, \cdot, \cdot), i_0)$ une paire hypercohérente partielle complétable. Alors la paire $(H_1 = (A_1, \cdot, \cdot), i_1)$ définie par :*

- $A_1 = A_0 \cup ((\mathcal{D}(H_0)_c \times A_0) \setminus \text{Dom}(i_0))$.

- $i_1 = i_0 \cup id_{(\mathcal{D}(H_0)_c \times A_0) \setminus Dom(i_0)}$.
- $,_1 = \{w \subseteq_f^* A_1; w \in ,_0 \vee (w = i_1(u) \wedge u \in , (H_0 \Leftrightarrow H_0))\}$.

est une paire hypercohérente partielle qui étend (H_0, i_0) .

Preuve : Il faut vérifier que (H_1, i_1) est une paire hypercohérente partielle et que cette paire étend (H_0, i_0) .

1. Par définition $Dom(i_1) = \mathcal{D}(H_0)_c \times A_0$, $i_1|_{Dom(i_0)} = i_0$, $A_0 \subseteq A_1$ et $,_0 \subseteq ,_1$.
2. Pour établir que $H_0 \preceq H_1$ il suffit de vérifier que $,_1 \cap \mathcal{P}(A_0) \subseteq ,_0$.
Soit $w \in ,_1$ et $w \subseteq_f^* A_0$. D'après la définition de $,_1$ on a soit $w \in ,_0$ soit $w = i_1^\bullet(u)$ avec $u \in , (H_0 \Leftrightarrow H_0)$. Si on est dans le premier cas on a fini. Sinon le fait que $w \subseteq_f^* A_0$ implique que $u \in Dom(i_0)$. En effet si $u \notin Dom(i_0)$ on a $(a, \alpha) \in u$ tel que $i_1(a, \alpha) = (a, \alpha) \in i_1^\bullet(u) = w$ et donc $(a, \alpha) \in A_0$. Il vient que $A_0 \cap (\mathcal{D}(H_0)_c \times A_0 \setminus Dom(i_0)) \neq \emptyset$ contrairement au fait que (H_0, i_0) soit complétable. On est donc assuré que $u \in Dom(i_0)$ d'où $i_1^\bullet(u) = i_0^\bullet(u)$ et i_0 étant un morphisme partiel d'hypercohérence $i_0^\bullet(u) = w \in ,_0$.
3. i_1 est injective.
Soient (a, α) et (b, β) dans $\mathcal{D}(H_1)_c \times A_1$ tels que $i_1(a, \alpha) = i_1(b, \beta)$. Remarquons tout d'abord que l'on ne peut avoir $(a, \alpha) \in Dom(i_0)$ et $(b, \beta) \notin Dom(i_0)$ ou $(b, \beta) \in Dom(i_0)$ et $(a, \alpha) \notin Dom(i_0)$. Supposons que l'on soit dans le premier cas. Alors $i_1(a, \alpha) = i_0(a, \alpha) \in A_0$ et $i_1(b, \beta) = (b, \beta) \notin Dom(i_0)$. Donc $(\mathcal{D}(H_0)_c \times A_0 \setminus Dom(i_0)) \cap A_0 \neq \emptyset$ ce qui contredit le fait que (H_0, i_0) est complétable. Supposons que (a, α) et (b, β) appartiennent à $Dom(i_0)$. Alors l'injectivité de i_0 nous assure que $(a, \alpha) = (b, \beta)$.
Si (a, α) et (b, β) n'appartiennent pas à $Dom(i_0)$ alors $i_1(a, \alpha) = (a, \alpha) = i_1(b, \beta) = (b, \beta)$.

4. Montrons enfin que i_1 est un morphisme d'hypercohérence partiel de $H_1 \Leftrightarrow H_1$ vers H_1 . Tout d'abord remarquons que $Dom(i_1) = \mathcal{D}(H_0)_c \times A_0 \subsetneq \mathcal{D}(H_1)_c \times A_1$ car $A_0 \subsetneq A_1$.
Soit $w \subseteq_f^* Dom(i_1)$ tel que $w \in , (H_1 \Leftrightarrow H_1)$. Le fait que $w \subseteq_f^* Dom(i_1)$ nous dit que $w \subseteq_f^* \mathcal{D}(H_0)_c \times A_0$ et $w \in , (H_1 \Leftrightarrow H_1) \cap \mathcal{P}(\mathcal{D}(H_0)_c \times A_0)$. La proposition 2.7.3 nous affirme que $H_0 \Leftrightarrow H_0 \preceq H_1 \Leftrightarrow H_1$ ce qui entraîne que $w \in , (H_0 \Leftrightarrow H_0)$ et donc, par définition de $,_1$, $i_1^\bullet(w) \in ,_1$.
Soit $w \subseteq Dom(i_1)$ tel que $i_1^\bullet(w) \in ,_1$.
D'après la définition de $,_1$ on a deux possibilités pour w :

- (a) $w \in , (H_0 \Leftrightarrow H_0)$ alors $w \in , (H_1 \Leftrightarrow H_1)$ car $H_0 \Leftrightarrow H_0 \preceq H_1 \Leftrightarrow H_1$;
- (b) $i_1^\bullet(w) \in ,_0$ alors $i_1^\bullet(w) \subseteq \mathcal{P}(A_0)$ et donc, pour tout $(a, \alpha) \in w$, $(a, \alpha) \in Dom(i_0)$, toujours parce que (H_0, i_0) est complétable. Ainsi $i_1^\bullet(w) = i_0^\bullet(w)$ et comme i_0 est un morphisme partiel d'hypercohérence on a $w \in , (H_0 \Leftrightarrow H_0) \subseteq , (H_1 \Leftrightarrow H_1)$.

□

On a étendu la paire hypercohérente partielle (H_0, i_0) en une autre paire partielle (H_1, i_1) . Pour pouvoir réitérer cette extension il reste à voir que la paire (H_1, i_1) est elle même complétable, ce qui se vérifie ici sans peine.

On notera $\overline{(H_0, i_0)} = (\overline{H_0}, \overline{i_0})$ l'extension d'une paire hypercohérente partielle (H_0, i_0) . D'après ce qui précède cette nouvelle paire est complétable.

La complétion de la paire (H_0, i_0) est la paire hypercohérente (H, i) définie par : $(H, I) = (\bigcup_{n \geq 0} H_n, \bigcup_{n \geq 0} i_n)$ où, pour tout $n \geq 0$, on a $(H_{n+1}, i_{n+1}) = \overline{(H_n, i_n)}$. Cette définition est correcte, car, pour tout entier n , $H_{n+1} \preceq H_n$ et la proposition 2.7.4 nous affirme que $\bigcup_{n \geq 0} H_n$ est une hypercohérence. Et de plus par construction $i_{n+1}/_{Dom(i_n)} = i_n$ et (H_n, i_n) est complétable. Enfin il est clair que i est un morphisme d'hypercohérence.

Définition 2.10.8 *Un cycle de longueur n dans une paire $(H = (D, \cdot, \cdot), i)$ (éventuellement partielle) est une suite finie $(\delta_p)_{0 \leq p \leq n} \subseteq D$ telle que :*

Pour tout $\delta_{(p+1) \text{ modulo } (n)}$ il existe $d \subseteq D$ et $\mu \in D$ tels que $\delta_p = i(d, \mu)$ et $\delta_{(p+1) \text{ modulo } (n)} \in d \cup \{\mu\}$.

Remarque :

Il est à noter que la complétion d'une paire hypercohérente partielle ne rajoute pas de nouveaux cycles (même démonstration que celle donnée dans [44] page 32 pour le cadre des modèles de graphes)

2.11 Rétractions universelles fortement stables et la théorie RU_∞

Soit \mathcal{D} un objet d'une c.c.c. Une **rétraction** de \mathcal{D} est un élément idempotent de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]$ et une **rétraction universelle** est une rétraction dont l'image est l'ensemble des rétractions de \mathcal{D} .

Le problème de l'existence d'une rétraction universelle dans un objet réflexif \mathcal{D} d'une c.c.c. est fortement lié à la modélisation du polymorphisme. Nous renvoyons le lecteur à [11],[12] et [2] pour l'introduction à ces notions.

Dans la catégorie régulière des domaines de Scott et des fonctions continues les solutions positives ne concernent que des sous classes de l'ensemble des rétractions continues d'un domaine de Scott, [64] et [1].

Dans [38] il est montré qu'aucun modèle de Scott qui est un modèle du λ -calcul pur n'admet de rétraction universelle.

Par contre tout modèle de la sémantique stable est un modèle de la logique combinatoire dans lequel il existe un objet qui est le code d'une rétraction universelle [11]. Ces modèles sont des modèles de la théorie λ_p introduite dans [1]. Dans [4] on trouve le premier modèle de cette théorie. Celui-ci est construit dans la catégorie régulière des domaines stables bifinis et des fonctions stables.

Enfin récemment dans [31] il est montré que tout DI-domaine réflexif contient une infinité de rétractions universelles, appelées ρ_n , et donc tous les objets de cette classe sont des modèles de la théorie RU_∞ introduite dans ce même article.

Le but de cette section est de montrer que tout i -modèle fortement stable est un modèle de RU_∞ .

Dans [31], pour établir le fait que tout DI-domaine réflexif non trivial \mathcal{D} satisfait RU_∞ il est prouvé, tout d'abord, que \mathcal{D} contient une infinité d'éléments compacts deux à deux incompatibles. Ce qui permet d'avoir, pour tout entier n , $D_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ un ensemble d'éléments compacts deux à deux incompatibles et une application π_n de D_n dans D_n qui à c_i associe c_{i+1} (*modulo* n). On considère alors les fonctions U_{π_n} de \mathcal{D} vers \mathcal{D} définies par :

$$U_{\pi_n}(x) = \begin{cases} \pi_n(c_i) & \text{si } x \geq c_i, \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont stables et permettent de distinguer les ρ_n .

Si on se place maintenant dans un DI-domaine avec cohérence $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ alors les fonctions U_{π_n} ne sont pas forcément fortement stables. En effet si on considère $A \in \mathcal{C}$ alors $U_{\pi_n} \bullet (A)$ peut être n'importe quel sous-ensemble de D_n et rien ne garantit l'appartenance des D_n et de tous leurs sous-ensembles à \mathcal{C} .

Pour éviter ce problème les fonctions que l'on utilise pour différencier les ρ_n sont une variante des fonctions U_{π_n} .

Nous ne voyons pas actuellement comment montrer que tout DIC réflexif non trivial satisfait RU_∞ .

2.11.1 Rétractions universelles fortement stables

Soit $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un DI-domaine avec cohérence. Une rétraction r de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$ est un élément de cet ensemble tel que $r = r \circ r$. De plus r est une rétraction universelle si $Im(r)$ est l'ensemble des rétractions de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$. On note $R(\mathcal{D})$ l'ensemble des rétractions de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$.

Dans [4] Amadio construit une rétraction universelle en utilisant le fait suivant sur les fonctions : si on se donne une fonction f d'un ensemble D dans lui-même telle que $Im(f)$ est fini, il y a une façon naturelle d'associer à cette fonction f une rétraction. La construction des ρ_n utilise cette même propriété :

Lemme 2.11.1 *Soient X un ensemble et f de X vers X une fonction telle que $Im(f)$ est fini. Alors $\{f^n; n \geq 1\}$ contient une unique rétraction.*

Preuve Unicité : si f^n et f^m sont des rétractions, alors $(f^m)^n = f^m$ et $(f^n)^m = f^n$, car $n, m \geq 1$. Donc $f^n = f^m$.

Existence : soit X_n l'image de f^n ; $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante d'ensembles finis. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $X_k = X_n$ pour tout $n \geq k$. Soit f_k la restriction de f à X_k . Alors f_k est une permutation de X_k , donc $(f_k)^n$ est l'identité sur X_k si $n = (\#(X_k))!$. Il en résulte que f^n est l'identité sur X_k , donc aussi f^{nk} . Mais $f^{nk} = (f^k)^n$ à pour image

X_k et est donc une rétraction de X sur X_k .

□

Fait 2.11.2 1. Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} deux DI-domaines avec cohérences. Les éléments compacts de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{E}]_{FS}$ sont les fonctions de traces finies. Si $\epsilon \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{E}]_{FS_c}$ alors $\epsilon(\mathcal{D})$ est fini et est inclu dans \mathcal{E}_c et si $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ alors $\epsilon^n \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS_c}$.

2. Soit $(\mathcal{D}(H), F, G)$ un i -modèle. On appelle code de la fonction f de $[\mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \mathcal{D}(H)]_{FS}$ l'élément $G(f) \in \mathcal{D}(H)$. On note \mathcal{F} la cohérence de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$ et on rappelle que $tr^{\bullet\bullet}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}(H \Leftrightarrow H)$ (voir la proposition 2.6.9).

On définit l'application σ de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS_c}$ dans lui même par : $\sigma(f)$ est une rétraction et une puissance de f . Cette définition est licite car on a rappelé dans les faits précédent que si $f \in [\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS_c}$ alors $\{f(u); u \in \mathcal{D}\}$ est un ensemble fini. Le lemme 2.11.2 nous dit qu'alors on peut associer à f une unique rétraction f^n .

Montrons que l'application σ préserve la cohérence finie de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS_c}$ et commute aux infs d'ensembles de la cohérence finie.

Lemme 2.11.3 Soit $F = \{f_1, \dots, f_l\} \in \mathcal{F}$ tel que tous les éléments de F sont compacts. Alors $\sigma^\bullet(F) \in \mathcal{F}$ et $\sigma^\bullet(\sqcap F) = \sqcap \sigma^\bullet(F)$.

Preuve Précisons que $\sigma^\bullet(F) = \{f_1^{n_1}, \dots, f_l^{n_l}\}$ où, pour tout $i \leq l$, $f_i^{n_i}$ est une rétraction. Considérons $N = n_1 \times \dots \times n_l$. Pour tout $i \leq l$, $f_i^N = f_i^{n_i}$ car $f_i^{n_i}$ est une rétraction. Il en résulte que $\sigma^\bullet(F) = \{f_1^N, \dots, f_l^N\} = Comp_N^\bullet(F) \in \mathcal{F}$ car $Comp_N$ est fortement stable d'après la proposition 2.6.15.

Si f_1, \dots, f_l sont des éléments compacts de $[\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}]_{FS}$ qui, muni de l'ordre stable, est DI-domaine alors $f_1 \wedge \dots \wedge f_l$ est compact et $\sigma(f_1 \wedge \dots \wedge f_l)$ est bien défini. On a $\sigma(f_1 \wedge \dots \wedge f_l) = (f_1 \wedge \dots \wedge f_l)^m$, pour un entier m , et $\sqcap \sigma^\bullet(F) = f_1^{n_1} \wedge \dots \wedge f_l^{n_l}$. Posons $N = m \times n_1 \times \dots \times n_l$. Il vient que, pour tout $i \leq l$, $f_i^{n_i} = f_i^N$ et $(f_1 \wedge \dots \wedge f_l)^m = (f_1 \wedge \dots \wedge f_l)^N$. Ainsi $\sigma(\sqcap F) = Comp_N(\sqcap F) = \sqcap Comp_N^\bullet(F) = \sqcap \sigma^\bullet(F)$.

□.

On se place maintenant dans un DI-domaine $\mathcal{D}(H)$ engendré par une hypercohérence $H = (D, ,)$. Définissons, pour tout $n \geq 0$, ρ_n de $[\mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \mathcal{D}(H)]_{FS}$ dans lui même par :

$$\rho_n(u) = \bigsqcup \{ \sigma(\epsilon); \epsilon \in [\mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \mathcal{D}(H)]_{FS_c}, \epsilon \leq u, \epsilon \leq \epsilon^{n+1} \}$$

Il est montré dans [31] que les ρ_n sont des rétractions universelles stables. Nous montrons ici que ces rétractions universelles sont fortement stables.

Lemme 2.11.4 Pour tout $n \geq 0$, ρ_n est une fonction fortement stable.

Preuve Soit $F = \{f_1, \dots, f_l\} \in \mathcal{F}$.

Montrons que $tr^\bullet(\rho_n^\bullet(F)) \in \mathcal{C}(H \Leftrightarrow H)$.

Soit $v = \{(b_1, \beta_1), \dots, (b_r, \beta_r)\} \triangleleft_f tr^\bullet(\rho_n^\bullet(F))$.

On veut montrer que $v \in , (H \Leftrightarrow H) = \{w \subseteq_f^* \mathcal{D}(H)_c \times D; (w)_1 \in \mathcal{C} \Rightarrow (w)_2 \in$

, (H) et $(w)_1 \in \mathcal{C}^{>1}(H) \Rightarrow (w)_2 \in , >^1(H)\}$.

Si $(v)_1 = \{b_1, \dots, b_n\} \notin \mathcal{C}(H)$, alors $v \in , (H \Leftrightarrow H)$ par définition.

Supposons maintenant que $(v)_1 \in \mathcal{C}(H)$. On veut montrer que $(v)_2 \in , .$

Dire que v est une multisection de $tr^\bullet(\rho_n^\bullet(F))$ signifie que :

$$\forall j \leq r \quad \exists i_j \leq l \quad \beta_j \in \rho_n(f_{i_j})(b_j).$$

$$\forall i \leq l \quad \exists j_i \leq r \quad \beta_{j_i} \in \rho_n(f_i)(b_{j_i}).$$

Et $\rho_n(f)(\alpha) = \bigsqcup \{\sigma(\epsilon)(\alpha); \epsilon \leq f, \epsilon \leq \epsilon^{n+1}\}$.

Ainsi pour tout $j \leq r$ on a un $i_j \leq l$ tel qu'il existe un ϵ_{0i_j} tel que ϵ_{0i_j} est compact, $\epsilon_{0i_j} \leq f_{i_j}$, $\epsilon_{0i_j} \leq \epsilon_{0i_j}^{n+1}$ et $\beta_j \in \sigma(\epsilon_{0i_j})(b_j)$. Et pour tout $i \leq l$ on a un $j_i \leq r$ tel qu'il existe un ϵ_{0i} tel que ϵ_{0i} est compact, $\epsilon_{0i} \leq f_i$, $\epsilon_{0i} \leq \epsilon_{0i}^{n+1}$ et $\beta_{j_i} \in \sigma(\epsilon_{0i})(b_{j_i})$.

Ceci se résume en disant que :

$$(v)_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \triangleleft W = \{\sigma(\epsilon_{0i_1})(b_1), \dots, \sigma(\epsilon_{0i_r})(b_r), \sigma(\epsilon_{01})(b_{j_1}), \dots, \sigma(\epsilon_{0l})(b_{j_l})\}.$$

Posons $K = \{\epsilon_{0i_1}, \dots, \epsilon_{0i_r}, \epsilon_{01}, \dots, \epsilon_{0l}\}$.

On rappelle que $f \leq_s g \Leftrightarrow tr(f) \subseteq tr(g)$. Ainsi $tr^\bullet(K) \sqsubseteq tr^\bullet\{f_1, \dots, f_l\} \in \mathcal{C}(H \Leftrightarrow H)$, car $F \in \mathcal{F}$. Il vient que l'ensemble K est dans la cohérence finie de $[\mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \mathcal{D}(H)]_{FS}$ et le lemme précédent nous affirme que $\sigma^\bullet(K) \in \mathcal{F}$.

Soit $\Omega = \{(\sigma(\epsilon_{0i_1}), b_1), \dots, (\sigma(\epsilon_{0i_r}), b_r), (\sigma(\epsilon_{01}), b_{j_1}), \dots, (\sigma(\epsilon_{0l}), b_{j_l})\}$ un recouvrement de $\sigma^\bullet(K)$ et de $(v)_1$. Du fait que $\sigma^\bullet(K) \in \mathcal{F}$ et que $(v)_1 \in \mathcal{C}$ on déduit que :

$$\{g(x); (g, x) \in \Omega\} = W \in \mathcal{C} \text{ et donc } (v)_2 \in , .$$

Supposons maintenant que $(v)_1 \in \mathcal{C}^{>1}(H)$. Montrons alors que $(v)_2 \in , >^1(H)$.

Si $(v)_2 = \{\beta\}$ alors $v = \{(b_1, \beta), \dots, (b_r, \beta)\} \triangleleft tr^\bullet(\rho_n^\bullet(F))$. D'après ce que l'on vient de voir on a :

$$\beta \in \{\sigma(\epsilon_{0i_1})(b_1) \wedge \dots \wedge \sigma(\epsilon_{0i_r})(b_r) \wedge \sigma(\epsilon_{01})(b_{j_1}) \wedge \dots \wedge \sigma(\epsilon_{0l})(b_{j_l})\}.$$

Ainsi $\beta \in \Pi\{g, x\}; (g, x) \in \Omega\}$. Et puisque $\sigma^\bullet(K) \in \mathcal{F}$ et $(v)_1 \in \mathcal{C}$ on a, d'après le lemme précédent, que $\beta \in (\Pi\sigma^\bullet(K))(\Pi(v)_1) = \sigma(\Pi K)(\Pi(v)_1)$. Soit $j_0 \leq l$ tel que $b_{j_0} > \Pi(v)_1$. Il en existe au moins un car $\sharp(v)_1 > 1$. Alors $\beta \in \sigma(\epsilon_{i_{j_0}})$, car σ est croissante, et $\beta \in \rho_n(f_{i_{j_0}})(\Pi(v)_1)$. On sait que $(b_{j_0}, \beta) \in tr(\rho_n(f_{i_{j_0}}))$, ce qui nous dit que $\beta \in \rho_n(f_{i_{j_0}})(b_{j_0})$ et que b_{j_0} est minimal pour cette propriété. Or $\beta \in \rho_n(f_{i_{j_0}})(\Pi(v)_1)$ avec $\Pi(v)_1 < b_{j_0}$. Contradiction.

Montrons maintenant que $\rho_n(\Pi F) = \Pi\rho_n^\bullet(F)$.

Par croissance $\rho_n(\Pi F) \subseteq \Pi\rho_n^\bullet(F)$.

Soit $\alpha \in \Pi\rho_n^\bullet(F)$. Pour tout $i \leq l$ $\alpha \in \sigma(\epsilon_i)$ avec ϵ_i compact, $\epsilon_i \leq f_i$ et $\epsilon_i \leq \epsilon_i^{n+1}$.

L'ensemble $H = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_l\} \sqsubseteq F$ et donc H est un ensemble de la cohérence finie de $[\mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \mathcal{D}(H)]_{FS}$. Le lemme précédent nous affirme que $\alpha \in \Pi\sigma^\bullet(H)$ entraîne que $\alpha \in \sigma(\Pi H)$.

Il est clair que $\epsilon = \Pi H$ est compact et que $\epsilon \leq \Pi F$. De plus $\epsilon^{n+1} = Comp_{n+1}(\Pi H) = \epsilon_1^{n+1} \wedge \dots \wedge \epsilon_l^{n+1}$ car $Comp_{n+1}$ est fortement stable. Par hypothèse, pour tout $i \leq l$, $\epsilon_i \leq \epsilon_i^{n+1}$ d'où $\epsilon = \Pi H \leq \Pi Comp_{n+1}^\bullet(H) = \epsilon^{n+1}$. Il vient que $\alpha \in \rho_n(\Pi F)$.

□

2.11.2 La théorie RU_∞

Les fonctions ρ_n sont des rétractions universelles fortement stables. Il reste à montrer qu'elles sont toutes distinctes. Soit LC l'ensemble des axiomes de la logique combinatoire [8],[47] et RU_∞ l'ensemble suivant d'axiome, écrit à l'aide de nouveaux symboles de constantes $(P_n)_{n \geq 0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n \circ P_n = P_n; \\ \forall x ((P_n)x \circ (P_n)x = (P_n)x); \\ \forall x (x \circ x = x \Rightarrow (P_n)x = x); \\ P_n \neq P_m \ (n \neq m) \end{array} \right.$$

Si t et t' sont des termes de la logique combinatoire, $t \circ t'$ désigne le terme $\lambda^*x (t)(t')x$ où λ^* est la traduction standard de l'abstraction en logique combinatoire à l'aide des constantes k et s (voir [8] ou [47]).

Dans la suite de ce paragraphe on montre le théorème suivant :

Théorème 2.11.5 *Tout i -modèle fortement stable satisfait $LC + RU_\infty$.*

Nous donnerons la preuve de ce théorème sous forme d'une suite de lemme.

Nous devons d'abord définir les fonctions u_{π_n} qui nous servirons à distinguer les ρ_n .

Lemme 2.11.6 *Soient $H_1 = (D_1, \cdot, \cdot)$ et $H_2 = (D_2, \cdot, \cdot)$ deux hypercohérences et i une injection de D_1 vers D_2 . Alors si p est un élément premier de $\mathcal{D}(H_1)$, $i^\bullet(p)$ est un élément premier de $\mathcal{D}(H_2)$.*

Preuve C'est clair puisque les éléments premiers de $\mathcal{D}(H_1)$ et $\mathcal{D}(H_2)$ sont les singletons. \square

Lemme 2.11.7 *Soit $\mathcal{D}_{(H=(D,\Gamma),i)}$ un i -modèle fortement stable.*

Il existe dans ce modèle des ensembles majorés A_n arbitrairement grands d'éléments premiers, et un élément u tel que, pour tout n , $A_n \sqsubseteq \{u\}$.

Preuve On rappelle que i est un morphisme d'hypercohérence de $H \Leftrightarrow H$ vers H et que pour tout $\alpha \in D$ $\{\alpha\} \in \mathcal{D}$.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ une énumération de D .

Considérons l'ensemble $K = \{(\{\alpha\}, \alpha); \alpha \in D\}$. Cet ensemble est infini, car D l'est.

Montrons que $K \in \mathcal{D}(H \Leftrightarrow H)$.

Soit $v = \{(\{\beta_1\}, \beta_1), \dots, (\{\beta_p\}, \beta_p)\} \subseteq K$. Il nous faut vérifier que $v \in \cdot, (H \Leftrightarrow H)$.

Si $(v)_1 \notin \mathcal{C}(H)$ alors par définition $v \in \cdot, (H \Leftrightarrow H)$.

Si $(v)_1 \in \mathcal{C}(H)$ alors, puisque $(v)_2 \triangleleft (v)_1$, $(v)_2 \in \cdot, \cdot$.

Si $(v)_1 \in \mathcal{C}^{>1}(H)$ il est clair que $(v)_2 \in \cdot, >^1(H)$.

Ainsi dans $\mathcal{D}(H \Leftrightarrow H)$, pour tout $n \geq 1$, on a un ensemble B_n constitué d'éléments premiers de $\mathcal{D}(H \Leftrightarrow H)$ et majoré, pour l'ordre Egli-Milner, par $\{K\}$:

$B_n = \{(\{\alpha_1\}, \alpha_1), \dots, (\{\alpha_n\}, \alpha_n)\}$.

D'après le lemme précédent $i^\bullet(B_n) = A_n$ est un ensemble d'éléments premiers de $\mathcal{D}(H)$ et $A_n \sqsubseteq \{u\}$ avec $u = i^\bullet(K)$.

□

On pose dorénavant $A_n = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Fixons n . Soit π_n une application de A_n dans A_n . La fonction u_{π_n} est définie par :

$$u_{\pi_n}(x) = \cup\{\pi_n(p); p \in A_n \text{ et } p \subseteq x\}$$

Les lemmes suivants donne certaines propriétés de la fonction u_{π_n} .

Le lemme suivant nous dit que u_{π_n} est fortement stable. Pour pouvoir démontrer ce lemme on utilise le fait que les A_n sont majorés et que les éléments des A_n sont des éléments premiers d'un domaine qualitatif.

Lemme 2.11.8 *La fonction u_{π_n} est fortement stable.*

Preuve Il est clair que u_{π_n} est croissante.

Soit X un ensemble filtrant dans \mathcal{D} .

Si $u_{\pi_n}(\bigcup X) = \pi_n(p_{i_1}) \cup \dots \cup \pi_n(p_{i_l})$ avec $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_l}\} \subseteq_f A_n$ alors, du fait que pour tout $j \leq l$ $\pi_n(p_{i_j})$ est premier, on a $\pi_n(p_{i_j}) \subseteq \bigcup X$ entraine qu'il existe $x \in X$ tel que $\pi_n(p_{i_j}) \subseteq x$. De plus il est clair que l'on ne peut avoir un $x \in X$ tel que $p \subseteq x$ avec $p \in A_n \setminus \{p_{i_1}, \dots, p_{i_l}\}$. Donc $\bigcup_{x \in X} u_{\pi_n}(x) = \pi_n(p_{i_1}) \cup \dots \cup \pi_n(p_{i_l})$.

Soit $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{C}$. Alors $u_{\pi_n}^\bullet(A) \sqsubseteq \{u\}$ et donc est dans \mathcal{C} .

Et $\bigcap u_{\pi_n}^\bullet(A) = u_{\pi_n}(a_1) \cap \dots \cap u_{\pi_n}(a_m)$. Le fait que les éléments de A_n soient premiers implique que, pour tous $i, j \leq n$ avec $i \neq j$, $p_i \cap p_j = \emptyset$. Ainsi $u_{\pi_n}(a_1) \cap \dots \cap u_{\pi_n}(a_m) = \{p \in A_n; \forall a \in A p \subseteq a\} = u_{\pi_n}(\bigcap A)$.

□

Le lemme suivant immédiat.

Lemme 2.11.9 *Soient π_n et π'_n deux applications de A_n dans A_n .*

- Si $\pi_n \neq \pi'_n$ alors $u_{\pi_n} \neq u_{\pi'_n}$.
- Pour tout entier l , $u_{\pi_n}^l = u_{\pi'_n}^l$.
- $u_{\pi_n} \leq_s u_{\pi'_n}$ ssi $\pi_n(p) = \pi'_n(p)$.
- $u_{\pi_n}^l \leq_s u_{\pi_n}^q$ ssi $\pi_n^l(p) = \pi_n^q(p)$

En corollaire immédiat de ce lemme nous avons, si l'application π_n est maintenant l'application qui à p_i associe p_{i+1} (modulo n), le lemme suivant :

Lemme 2.11.10 • $u_{\pi_n} \leq_s u_{\pi_n}^{m+1}$ ssi il existe un entier k tel que $m = k \times n$.

- $u_{\pi_n}^{n+k} = u_{\pi_n}^k$.
- $u_{\pi_n}^n \circ u_{\pi_n}^n = u_{\pi_n}^n$.

On considère dorénavant que l'application π_n est l'application $\pi_n(p_i) = p_{i+1}(\text{modulo } n)$. Montrons qu'avec ce choix pour π_n les applications u_{π_n} , $n \in \mathbb{N}$ permettent de distinguer les rétractions ρ_n .

On notera dans la suite $\pi_n(p_i)$ par p_{i+1} sous entendu que $\pi_n(p_n) = p_1$.

Rappelons que $\epsilon_{\emptyset, \emptyset}$ dénote la fonction constante qui à $x \in \mathcal{D}$ associe \emptyset . Il est clair que c'est une rétraction.

Lemme 2.11.11 *Si $\epsilon \prec_s u_{\pi_n}$ alors $\sigma(\epsilon) = \epsilon_{\emptyset, \emptyset}$.*

Preuve

1. On montre qu'il existe un $p_i \in A_n$ tel que $\epsilon(p_i) = \emptyset$. Il est alors clair que pour tout entier r assez grand et pour tout $j \leq l$ $\epsilon^r(p_j) = \emptyset$.

Supposons que pour tout $p \in A_n$ on a $\epsilon(p) = u_{\pi_n}(p)$.

Soit $x \in \mathcal{D}$. Si $u_{\pi_n}(x) = \emptyset$ alors $\epsilon(x) = \emptyset$.

Sinon $u_{\pi_n}(x) = p_{i_1+1} \cup \dots \cup p_{i_l+1}$ soit $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_l}\} \subseteq \{x\}$. Pour tout $j \leq l$ on a :

$$\begin{aligned} u_{\pi_n}(x) &= p_{i_1+1} \cup \dots \cup p_{i_l+1} \\ &= u_{\pi_n}(p_{i_1}) \cup \dots \cup u_{\pi_n}(p_{i_l}) \\ &= \epsilon(p_{i_1}) \cup \dots \cup \epsilon(p_{i_l}) \text{ d'après l'hypothèse} \\ &\subseteq \epsilon(p_{i_1} \cup \dots \cup p_{i_l}) \text{ par croissance} \\ &\subseteq \epsilon(x) \\ &\subseteq u_{\pi_n}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $u_{\pi_n} = \epsilon$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale.

2. Supposons maintenant que l'on a $r = n \times m + k$ un entier tel que, pour tout $p \in A_n$, $\epsilon^r(p) = \emptyset$. Montrons que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\epsilon^r(x) = \emptyset$.

L'application $Comp_r$ étant croissante, voir la proposition 2.6.15, $\epsilon^r \leq u_{\pi_n}^r$.

Si $u_{\pi_n}^r(x) = \emptyset$ alors $\epsilon^r(x) = \emptyset$.

Sinon $u_{\pi_n}^r(x) = p_{i_1+k} \cup \dots \cup p_{i_l+k}$ d'où $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_l}\} \subseteq x$.

On a donc, pour tout $p_j \in \{p_{i_1}, \dots, p_{i_l}\}$, $\epsilon^r(p_j) = \epsilon^r(x) \cap u_{\pi_n}^r(p_j)$.

Ainsi $\emptyset = (\epsilon^r(x) \cap p_{i_1+k}) \cup \dots \cup (\epsilon^r(x) \cap p_{i_l+k}) = \epsilon^r(x) \cap (p_{i_1+k} \cup \dots \cup p_{i_l+k})$ car \mathcal{D} est distributif.

Comme $\epsilon^r(x) \subseteq p_{i_1+k} \cup \dots \cup p_{i_l+k}$ on en déduit que $\epsilon^r(x) = \emptyset$ et que $\epsilon = \epsilon_{\emptyset, \emptyset}$.

□

On peut alors conclure la démonstration du théorème.

Pour $1 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1$ $\rho_k(u_{\pi_n}) = \epsilon_{\emptyset, \emptyset}$ et $\rho_n(u_{\pi_n}) = u_{\pi_n}^n \neq \epsilon_{\emptyset, \emptyset}$.

Par suite $\rho_n \neq \rho_m$ si $n \neq m$, si $n, m \geq 1$.

Enfin $\rho_0(u_{\pi_n}) = u_{\pi_n}^n$ quelque soit n d'où $\rho_n \neq \rho_0$ pour tout $n \geq 1$.

Chapter 3

L'incomplétude de la sémantique stable

On a présenté dans le chapitre précédent une construction de modèle fortement stable. Et on a vu comment construire les analogues stable et fortement stable des modèles usuels de la sémantique continue (modèle \mathcal{D}_∞ de Scott, modèle de Park, modèle d'Engeler). Il est naturel de se demander si un modèle continu donné a la même théorie équationnelle que son analogue stable, ou fortement stable. Honsell et Ronchi ont conjecturé que \mathcal{D}_∞ et son analogue stable ont la même théorie [36]. Cette conjecture, étendue au cas fortement stable, est prouvée dans [33]. Noter la différence par rapport au λ -calcul typé (PCF) pour lequel, comme on vient de le dire, les modèles standards ont des théories différentes. On retrouve un résultat analogue dans la sémantique du λ -calcul pur, en considérant un modèle non standard (en ce sens ici qu'il est non semi-sensible, i.e. qu'il égalise des termes résolubles à des termes qui ne le sont pas), à savoir le modèle de Park. Nous montrons ici que le modèle de Park continu, son analogue stable et son analogue fortement stable ont des théories différentes. Et que de plus, celle du premier est incomparable avec chacune des deux autres. Cette dernière assertion infirme une autre conjecture de Honsell et Ronchi qui affirmait que la théorie du modèle stable est strictement incluse dans celle du modèle continu [36].

Une autre question naturelle est de se demander si ces classes de modèles sont complètes, c'est-à-dire si elles contiennent toutes les λ -théories. Elle a été soulevée par Honsell et Ronchi pour la classe des modèles continus (appelés par eux *modèles topologiques*), et ces auteurs y ont répondu négativement [37]. Plus précisément, ils ont montré qu'il n'existe pas de modèle continu dont la théorie est $T_{\overline{\Lambda^0}}$, où $T_{\overline{\Lambda^0}}$ est la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement clos.

Leur démonstration consiste à supposer l'existence d'un modèle continu, \mathcal{D} , ayant $T_{\overline{\Lambda^0}}$ pour théorie, et à exhiber deux termes U et V tels que :

- $U = V$ est une équation de $T_{\overline{\Lambda^0}}$, et
- U et V sont distingués dans \mathcal{D} .

La complexité de la démonstration vient de ce que le premier point y est établi *syntactiquement* : ceci oblige à montrer par induction sur le contexte $C[]$ que $C[U] \in \overline{\Lambda^0}$ ssi

$C[V] \in \overline{\Lambda^0}$.

En fait, les termes U et V sont distingués dans tout modèle continu \mathcal{D} satisfaisant :

1. \mathcal{D} est extensionnel,
2. $(\Omega)\Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$,
3. $\lambda x (\Omega)(\Omega)x =_{\mathcal{D}} \Omega$,
4. $\Omega \neq_{\mathcal{D}} \lambda x \Omega$,

où Ω est le terme $(\lambda x (x)x)\lambda x (x)x$, et où $=_{\mathcal{D}}$ est la relation induite par l'égalité de \mathcal{D} sur l'ensemble des λ -termes.

Il est possible de donner une démonstration *sémantique* de l'incomplétude de la classe des modèles continus, en utilisant l'analogue stable, \mathcal{P}_s , du modèle de Park. En effet, on peut montrer très facilement que ce modèle satisfait les quatre conditions ci-dessus et égalise U et V , ce qui prouve que sa théorie n'est la théorie d'aucun modèle continu. Il en résulte une grande simplification technique.

Qu'en est-il des modèles stables ? Le principal résultat de ce chapitre est l'incomplétude de cette classe de modèles. Mais il nous faut préciser ce que nous entendons par "la classe des modèles stables".

Les différentes c.c.c. de la sémantique stable ont été examinées par Amadio dans [3]. Dans la structure la plus générale (CPO_{\wedge}), la stabilité est définie par la propriété de commutation aux infis finis d'éléments compatibles, mais elle n'est plus équivalente à la définition intuitive de la stabilité donnée par Berry, voir [14] ou la page 12 de l'introduction. Pour avoir cette équivalence, il faut ajouter aux axiomes définissant la structure une *propriété de finitude* : la non existence d'une chaîne infinie décroissante d'éléments compacts. On est alors amené à considérer des structures comme les DI-domaines, les *domaines stables bi-finis* d'Amadio, etc..., dans lesquelles les fonctions stables peuvent être représentées par des *traces stables*. Si on s'intéresse à la modélisation de l'aspect opératoire du λ -calcul, la notion de stabilité n'a d'intérêt que dans une c.c.c. où la stabilité (interne) correspond bien à la notion intuitive de stabilité ; notons (*) cette condition. La classe de modèles stables considérée ici est celle des DI-domaines. Cependant, notre démonstration n'utilise pas les propriétés spécifiques de ces derniers (distributivité et existence d'un sup pour les sous-ensembles majorés), mais seulement le maniement des traces stables ; elle reste donc valable, moyennant des adaptations de détail, dans toute c.c.c. de la sémantique stable vérifiant la condition (*).

Notre démonstration est *sémantique* et est similaire à celle décrite ci-dessus pour le cas continu : nous considérons un modèle particulier dont nous prouvons que la théorie n'est la théorie d'aucun modèle stable. Ce modèle est l'analogue fortement stable, \mathcal{P}_{fs} , du modèle de Park. En outre, nous montrons que la théorie $Th(\mathcal{P}_{fs})$ de \mathcal{P}_{fs} n'est la théorie d'aucun modèle continu.

Nous renforçons ensuite ces résultats d'incomplétude en exhibant un ensemble fini, \mathcal{F} , très simple, d'équations et d'inéquations, tel que :

1. \mathcal{F} est contenu dans $Th(\mathcal{P}_{fs})$ et dans $T_{\Lambda_0}^{\overline{0}}$, la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement λI -clos (qui en fait contient $Th(\mathcal{P}_s)$ et $Th(\mathcal{P}_{fs})$) ;
2. \mathcal{F} n'a pas de modèle stable, ni de modèle continu.

Enfin, on peut se demander si l'incomplétude de la classe des modèles stables ne pourrait pas être prouvée à l'aide d'un modèle continu particulier, plutôt que d'un modèle fortement stable. La démonstration dont nous venons d'expliquer le principe exploite le fait que le modèle fortement stable standard de PCF comporte moins de fonctions que son analogue stable. Par contre, il y a des fonctionnelles continues qui n'existent pas dans le cas stable, et cette propriété permet, dans le cas typé, de montrer que les modèles standards, continu et stable, de PCF ont des théories incomparables. Malheureusement, lorsqu'on cherche à construire des termes du λ -calcul pur qui exploitent cette situation, on tombe sur des problèmes de définissabilité. Le chapitre suivant présente une alternative à cette idée. En exploitant la différence entre l'ordre extensionnel et l'ordre stable on arrive à construire, en utilisant une technique de forcing dans les modèles continus, un modèle de segment initiaux dont la théorie n'est la théorie d'aucun modèle stable et d'aucun i -modèle fortement stable.

3.1 Les modèles \mathcal{P}

Soit \mathcal{P}_s (resp. \mathcal{P}_{fs}) le modèle de Park stable (resp. fortement stable) construit sur un ensemble d'atomes réduit à un élément (voir page 67 pour la construction détaillée dans le cadre fortement stable). Posons $p_0 = \mathbf{A} = \{\alpha_0\}$ ($= D_0$).

Noter cependant que tous les résultats qui suivent valent pour un modèle construit sur un ensemble d'atomes quelconque, moyennant certaines complications techniques dans les démonstrations.

Dans tout le reste de ce chapitre, la lettre \mathcal{P} désigne simultanément les deux modèles, \mathcal{P}_s et \mathcal{P}_{fs} .

Les deux lemmes suivants énoncent les quelques propriétés de \mathcal{P} (i.e. communes aux deux modèles) dont nous aurons besoin pour montrer nos résultats d'incomplétude.

Noter que le théorème 2.9.2 — qui précise comment se calcule l'interprétation d'un terme dans un modèle fortement stable construit à la Krivine — et le théorème similaire qui vaut dans le cas stable (cf. [47]), rendent les preuves de ces lemmes très faciles.

Lemme 3.1.1 *Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}$. Alors :*

$$(p_0)a_1 \cdots a_n = p_0 \cap a_1 \cap \cdots \cap a_n = \begin{cases} p_0 & \text{si } \forall i \ a_i \supseteq p_0 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve L'assertion suit de $(p_0)a = \{\beta ; \exists h \subseteq a, i(h, \beta) \in p_0\}$, et du fait qu'on a $i(h, \beta) \in p_0$ ssi $h = \{\alpha_0\}$ et $\beta = \alpha_0$.

□

Lemme 3.1.2 *Les modèles \mathcal{P} vérifient :*

- (i) $\Omega^* = p_0 = \{\alpha_0\}$,
 - (ii) $(\lambda x \Omega)^* = \{i(\emptyset, \alpha_0)\}$,
 - (iii) Ω^* et $(\lambda x \Omega)^*$ sont incompatibles,
 - (iv) $(\Omega^*)\Omega^* = \Omega^*$, $(\Omega^*)(\lambda x \Omega)^* = \emptyset$ et $(\lambda x (\Omega)(\Omega)x)^* = \Omega^*$,
- où Ω est le terme $(\lambda x (x)x)\lambda x (x)x$.

Preuve (i) Posons $\delta = \lambda x (x)x$. On a

$$\Omega^* = \{\beta ; \exists h \subseteq \delta^*, i(h, \beta) \in \delta^*\} \quad \text{et}$$

$$\delta^* = \{i(k, \gamma) ; \gamma \in (k)k \text{ et } k \text{ minimal pour cette propriété}\}.$$

Soit alors $\beta \in \Omega^*$. On a $\beta \in (h)h$, avec h minimal pour cette propriété et $h \subseteq \delta^*$. On en déduit qu'il existe $h' \subseteq h$ tel que $i(h', \beta) \in h$. On a donc $i(h', \beta) \in \delta^*$, et la minimalité de h impose $h' = h$, i.e. $i(h, \beta) \in h$. Mais le seul élément de la trame de \mathcal{P} qui vérifie une telle propriété est $i(\{\alpha_0\}, \alpha_0) (\in \{\alpha_0\})$. Ceci établit que $\Omega^* \subseteq \{\alpha_0\}$.

Pour avoir l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $i(\{\alpha_0\}, \alpha_0) \in \delta^*$ et $\{\alpha_0\} \subseteq \delta^*$. Le deuxième point est conséquence du premier, puisque $i(\{\alpha_0\}, \alpha_0) = \{\alpha_0\}$; le premier suit de $\alpha_0 \in (\{\alpha_0\})\{\alpha_0\}$ avec $\{\alpha_0\}$ minimal pour cette propriété. Et ceci est assuré par le lemme précédent.

(ii) On a $(\lambda x \Omega)^* = \{i(h, \beta) ; \beta \in \Omega^* \text{ et } h \text{ minimal pour cette propriété}\}$. D'où $(\lambda x \Omega)^* = \{i(\emptyset, \beta) ; \beta \in \Omega^*\}$, et le résultat suit de (i).

(iii) On a $\alpha_0 = i(\{\alpha_0\}, \alpha_0)$, donc $F(\Omega^*) = \{(\{\alpha_0\}, \alpha_0)\}$; d'autre part $F((\lambda x \Omega)^*) = \{(\emptyset, \alpha_0)\}$. Mais $\{(\{\alpha_0\}, \alpha_0), (\emptyset, \alpha_0)\}$ n'est pas une trace, d'après le théorème 1.5.2. Par extensionnalité, on en déduit que $\{\alpha_0\}$ et $\{i(\emptyset, \alpha_0)\}$ sont incompatibles.

(iv) Les deux premières égalités résultent immédiatement des points (i) et (ii) et du lemme précédent. Quant à la troisième, elle suit de

$$(\lambda x (\Omega)(\Omega)x)^* = \{i(h, \alpha) ; \alpha \in (p_0)(p_0)h \text{ et } h \text{ minimal}\}$$

et du lemme précédent.

□

3.2 Le théorème d'incomplétude stable

Nous pouvons maintenant montrer que la classe des modèles stables est incomplète vis-à-vis du λ -calcul. Plus précisément, nous prouvons le :

Théorème 3.2.1 *La théorie de \mathcal{P}_{fs} n'est la théorie d'aucun modèle stable.*

La preuve de ce théorème consiste :

- à exhiber deux termes X et Z qui sont égalisés dans \mathcal{P}_{fs} , et
- à montrer qu'il n'existe pas de modèle *stable* \mathcal{D} vérifiant

1. \mathcal{D} est extensionnel,

2. $(\Omega)\Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$,
3. $(\Omega)\lambda x \Omega \neq_{\mathcal{D}} \Omega$,

et qui égalise X et Z .

En effet, le lemme 3.1.2 assure que \mathcal{P}_{fs} satisfait ces trois conditions.

L'idée qui permet de trouver les termes X et Z est la suivante : Berry [15] a montré que tout modèle stable de PCF contenait une fonction stable *non séquentielle*, g_T (définie dans l'exemple 2 de la section 2.3). Cette fonction n'est donc l'interprétation d'aucun terme de PCF. Elle permet de construire des termes X' , Z' de PCF qui sont distingués par g_T dans tout modèle stable de PCF, alors qu'ils ne le sont par aucun terme de PCF. Ceci implique qu'il n'existe pas de modèle stable fully-abstract de PCF. Nous donnons ci-dessous une *variante non typée* g de g_T , à partir de laquelle nous définirons nos termes X et Z , et qui les distinguera dans tout modèle stable vérifiant les conditions (1), (2) et (3).

Soit \mathcal{D} un DI-domaine, et a , $Vrai$, $Faux$ des points de \mathcal{D} vérifiant :

- $Vrai$ et $Faux$ sont incompatibles,
- $a < Vrai$.

Alors $a \not\leq Faux$ et :

Proposition 3.2.2 *Il existe une fonction stable g de \mathcal{D}^3 dans \mathcal{D} qui vérifie :*

- (i) $g(a, Vrai, Faux) = g(Faux, a, Vrai) = g(Vrai, Faux, a) = Vrai$;
- (ii) $g(a, Faux, Vrai) = g(Vrai, a, Faux) = g(Faux, Vrai, a) = \perp$.

Preuve \mathcal{D} étant algébrique, il existe des compacts v , f , *incompatibles*, tels que $v \leq Vrai$ et $f \leq Faux$ (sans quoi l'ensemble $A = \{h \vee k ; h \leq Vrai, k \leq Faux\}$ serait filtrant et on aurait $\sqcup A = Vrai \vee Faux$). Soit alors g la fonction de trace :

$$Tr(g) = \bigcup_{\substack{\perp < p \leq Vrai \\ p \text{ premier}}} \{((\perp, v, f), p), ((f, \perp, v), p), ((v, f, \perp), p)\}.$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble ci-dessus est bien une trace (i.e. qu'il satisfait les conditions de l'analogie du théorème 1.5.2 pour les fonctions de plusieurs variables), et que la fonction associée vérifie les égalités (i) et (ii).

□

Proposition 3.2.3 *Soit (\mathcal{D}, F, G) un modèle stable vérifiant les conditions (1), (2) et (3). Alors dans \mathcal{D} on a :*

- Ω^* et $\lambda x \Omega^*$ incompatibles.
- $(\Omega^*)\perp < \Omega^*$.

Preuve

- $F((\lambda x \Omega)^*) \not\subseteq F(\Omega^*)$:

En effet, supposons que $F((\lambda x \Omega)^*) \subseteq F(\Omega^*)$. Par (1) on a $G \circ F = id$, et donc $(\lambda x \Omega)^* \leq \Omega^*$. D'où :

$$\Omega^* = (\lambda x \Omega)^*(\lambda x \Omega)^* \leq (\Omega^*)(\lambda x \Omega)^* \leq (\Omega^*)\Omega^* = \Omega^* \text{ par (2),}$$

et $(\Omega)\lambda x \Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$, ce qui contredit (3).

- Ω^* et $(\lambda x \Omega)^*$ sont incompatibles dans \mathcal{D} :

En effet, si on suppose que Ω^* et $(\lambda x \Omega)^*$ sont compatibles dans \mathcal{D} , on a aussi $F(\Omega^*)$ et $F((\lambda x \Omega)^*)$ compatibles (car F est croissante), ce qui signifie qu'il y a une trace qui contient simultanément $F(\Omega^*)$ et $F((\lambda x \Omega)^*)$.

On a $(\lambda x \Omega)^* = G(\{(\perp, k) ; k \leq \Omega^*\})$, et donc $F((\lambda x \Omega)^*) = \{(\perp, k) ; k \leq \Omega^*\}$, puisque $F \circ G = id$.

D'autre part, on a $(\Omega^*)\Omega^* = \sqcup\{k ; \exists h \leq \Omega^*, (h, k) \in F(\Omega^*)\}$, et par (2) :

$$k \leq \Omega^* \Rightarrow \exists h \leq \Omega^* ; (h, k) \in F(\Omega^*).$$

Le théorème 1.5.2 impose alors $h = \perp$ pour tout $(h, k) \in F(\Omega^*)$, par compatibilité de $F(\Omega^*)$ et $F((\lambda x \Omega)^*)$. D'où $F((\lambda x \Omega)^*) \subseteq F(\Omega^*)$, en contradiction avec le premier point.

- $(\Omega^*)\perp < \Omega^*$:

On sait déjà que $(\Omega^*)\perp \leq \Omega^*$ (par (2)). Supposons qu'il y ait égalité. Alors :

$$(\Omega^*)\perp = \sqcup\{k ; (\perp, k) \in F(\Omega^*)\} = \Omega^*.$$

Soit $k \leq \Omega^*$; il existe $k' \leq (\Omega^*)\perp$ tel que $(\perp, k') \in F(\Omega^*)$ et $k \leq k'$; on a alors $(\perp, k) \in F(\Omega^*)$, par le théorème 1.5.2. On en déduit $F((\lambda x \Omega)^*) \subseteq F(\Omega^*)$, en contradiction avec le premier point.

□

Remarque : On peut en fait montrer que dans tout modèle stable \mathcal{D} extensionnel satisfaisant $(T)T = T$ et $(T)\lambda x T \neq T$ pour $T \in \Lambda^0$ on a T^* et $\lambda x T^*$ incompatibles et $(T^*)\perp < T^*$. Nous avons ici choisie de privilégier les termes Ω et $\lambda x \Omega$ car on sait que dans les modèles \mathcal{P} on a $(\Omega)\Omega = \Omega$ et $(\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega$.

Considérons alors les termes :

$$\mathbf{X} = \lambda x \lambda z (\Omega)W_1W_2W_3$$

et

$$\mathbf{Z} = \lambda x \lambda z (\Omega)W_4W_5W_6, \quad \text{où}$$

$$W_1 = (x) (\Omega)z \quad \Omega \quad \lambda y \Omega$$

$$W_2 = (x) \lambda y \Omega \quad (\Omega)z \quad \Omega$$

$$W_3 = (x) \quad \Omega \quad \lambda y \Omega \quad (\Omega)z$$

$$W_4 = (x) (\Omega)z \quad \lambda y \Omega \quad \Omega$$

$$W_5 = (x) \quad \Omega \quad (\Omega)z \quad \lambda y \Omega$$

$$W_6 = (x) \lambda y \Omega \quad \Omega \quad (\Omega)z$$

Intuitivement, Ω correspond à *Vrai*, $\lambda y \Omega$ correspond à *Faux*, et $(\Omega)z$ correspond à a , une fois substitué \perp à z . Si l'on substitue g à x et \perp à z , on constate que le triplet W_1, W_2, W_3 correspond au cycle sur lequel g vaut *Vrai*, tandis que W_4, W_5, W_6 correspond au cycle sur lequel g vaut \perp .

Soit alors (\mathcal{D}, F, G) un modèle stable vérifiant les conditions (1), (2) et (3).

Nous venons de montrer que dans un tel modèle \mathcal{D} on a effectivement Ω^* et $(\lambda x \Omega)^*$ incompatibles et $(\Omega^*)\perp < \Omega^*$. Il suffit alors de poser $Vrai = \Omega^*$, $Faux = (\lambda x \Omega)^*$ et $a = ((\Omega^*)\perp)$, et de considérer une fonction stable g de \mathcal{D}^3 dans \mathcal{D} vérifiant les conditions de la proposition 3.2.2. Notons aussi g le code de cette fonction dans (\mathcal{D}, F, G) . On a $W_i[g/x, \perp/z] =_{\mathcal{D}} \Omega$, pour $1 \leq i \leq 3$, et $W_i[g/x, \perp/z] =_{\mathcal{D}} \perp$, pour $4 \leq i \leq 6$. D'où $(X) g \perp =_{\mathcal{D}} (\Omega) \Omega \Omega \Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$, et $(Z) g \perp =_{\mathcal{D}} (\Omega) \perp \perp \perp <_{\mathcal{D}} \Omega$. On en déduit que $(X) g \perp \neq_{\mathcal{D}} (Z) g \perp$.

Revenons maintenant au modèle de Park fortement stable, \mathcal{P}_{fs} . Pour établir le théorème 3.2.1, il suffit de montrer :

Proposition 3.2.4 $X = Z$ est une équation de \mathcal{P}_{fs} .

Preuve Dans cette démonstration, nous abrègeons $(\lambda y \Omega)^*$ en $\lambda y \Omega^*$.

Les termes X et Z sont égalisés dans \mathcal{P}_{fs} ssi $(X^*)fa = (Z^*)fa$ pour tous $a, f \in \mathcal{P}_{fs}$. (Par extensionnalité de \mathcal{P}_{fs} , ou encore parce que X et Z ont chacun deux λ en tête.)

D'après le lemme 3.1.1 on a :

$$(X^*)fa = \begin{cases} \{\alpha_0\} & \text{si pour tout } i \in \{1, 2, 3\} \alpha_0 \in W_i[f/x, a/z]^* \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Et } (Z^*)fa = \begin{cases} \{\alpha_0\} & \text{si pour tout } i \in \{4, 5, 6\} \alpha_0 \in W_i[f/x, a/z]^* \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle étant extensionnel, tout point de \mathcal{P}_{fs} est le code d'une fonction fortement stable de \mathcal{P}_{fs} dans \mathcal{P}_{fs} . Ainsi, il existe une fonction fortement stable \hat{f} de \mathcal{P}_{fs}^3 dans \mathcal{P}_{fs} telle que $\hat{f}(u, v, w) = (f)uvw$, pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{P}_{fs}^3$.

Supposons que $(X^*)fa = \{\alpha_0\}$. Alors $\alpha_0 \in \hat{f}(\Omega^*, \lambda y \Omega^*, (\Omega^*)a) \cap \hat{f}((\Omega^*)a, \Omega^*, \lambda y \Omega^*) \cap \hat{f}(\lambda y \Omega^*, (\Omega^*)a, \Omega^*)$.

Deux cas sont à distinguer :

1. $\alpha_0 \in a$. Alors $(\Omega^*)a = \Omega^* = \{\alpha_0\}$. Ainsi :

$$\alpha_0 \in W_1[f/x, a/z]^* = \hat{f}(\Omega^*, \lambda y \Omega^*, \Omega^*) = W_5[f/x, a/z]^*.$$

$$\alpha_0 \in W_2[f/x, a/z]^* = \hat{f}(\Omega^*, \Omega^*, \lambda y \Omega^*) = W_4[f/x, a/z]^*.$$

$$\alpha_0 \in W_3[f/x, a/z]^* = \hat{f}(\lambda y \Omega^*, \Omega^*, \Omega^*) = W_6[f/x, a/z]^*.$$

Donc $\alpha_0 \in (Z^*)fa$, et $(X^*)fa = (Z^*)fa$.

2. $\alpha_0 \notin a$. Alors $(\Omega^*)a = \emptyset$.

$$\text{On a } \alpha_0 \in \hat{f}(\Omega^*, \lambda y \Omega^*, \emptyset) \cap \hat{f}(\emptyset, \Omega^*, \lambda y \Omega^*) \cap \hat{f}(\lambda y \Omega^*, \emptyset, \Omega^*).$$

Or $A = \{(\Omega^*, \lambda y \Omega^*, \emptyset), (\emptyset, \Omega^*, \lambda y \Omega^*), (\lambda y \Omega^*, \emptyset, \Omega^*)\}$ est dans $\mathcal{C}(\mathcal{P}_{fs}^3)$, car pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $(A)_i = \{\emptyset, \Omega^*, \lambda y \Omega^*\} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}_{fs})$.

La fonction \hat{f} étant fortement stable, on a $\alpha_0 \in \hat{f}((\Omega^*, \lambda y \Omega^*, \emptyset) \cap (\emptyset, \Omega^*, \lambda y \Omega^*) \cap (\lambda y \Omega^*, \emptyset, \Omega^*)) = \hat{f}(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$. D'où, par croissance de f :

$\alpha_0 \in W_4[f/x, a/z]^* \cap W_5[f/x, a/z]^* \cap W_6[f/x, a/z]^*$, et donc $\alpha_0 \in (Z^*)fa$.
On en déduit $(X^*)fa = (Z^*)fa$.

Un raisonnement analogue montre que si $(Z^*)fa = \{\alpha_0\}$, alors $(X^*)fa = \{\alpha_0\}$.
□

Noter que l'argument montrant que A est une partie cohérente est celui utilisé dans la section 2.3, pour prouver que la fonction de Berry n'est pas fortement stable.

3.3 Cas des modèles continus

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'incomplétude de la classe des modèles continus est un théorème de Honsell et Ronchi [37]. Ces auteurs ont montré, à l'aide d'un argument syntaxique non trivial, qu'aucun modèle continu n'a T_{Λ^0} pour théorie (T_{Λ^0} est la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement clos).

Nous donnons ci-dessous une démonstration sémantique de l'incomplétude de la classe des modèles continus, en montrant le :

Théorème 3.3.1 *La théorie de \mathcal{P} n'est la théorie d'aucun modèle continu.*

Rappelons que \mathcal{P} désigne simultanément \mathcal{P}_s et \mathcal{P}_{fs} . Le théorème 3.2.1 donne le :

Corollaire 3.3.2 *La théorie du modèle de Park fortement stable n'est la théorie d'aucun modèle continu, ni d'aucun modèle stable.*

Notre preuve utilise les mêmes termes U et V que ceux considérés par Honsell et Ronchi [37] :

$$U = \lambda x \lambda z (\Omega) U_1 U_2,$$

où $U_1 = (x) (\Omega)z \Omega$ et $U_2 = (x) \Omega (\Omega)z$. Et

$$V = \lambda x \lambda z (\Omega) V_0,$$

où $V_0 = (x) (\Omega)z (\Omega)z$.

Lemme 3.3.3 *Soit \mathcal{D} un modèle continu vérifiant :*

1. \mathcal{D} est extensionnel,
2. $(\Omega)\Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$,
3. $\lambda x (\Omega)(\Omega)x =_{\mathcal{D}} \Omega$,
4. $\Omega \neq_{\mathcal{D}} \lambda x \Omega$.

Alors, les termes U et V sont distingués dans \mathcal{D} .

Preuve Rappelons que dans la sémantique continue, l'ordre sur les fonctions est l'ordre extensionnel. Soit \mathcal{D} un modèle continu vérifiant les quatre hypothèses. La condition (3) implique (3') : $(\Omega)(\Omega)c =_{\mathcal{D}} (\Omega)c$, pour tout $c \in \mathcal{D}$. Il s'agit de trouver des points a et f de \mathcal{D} tels que $(U^*)fa \neq (V^*)fa$. Nous reprenons les contre-exemples construits par Honsell et Ronchi, pour montrer que U et V sont distingués dans un modèle continu ayant $T_{\overline{\Lambda^0}}$ pour théorie [37]. Deux cas sont à distinguer :

1. $(\Omega^*)c \leq \Omega^*$ pour tout $c \in \mathcal{D}$. Alors $\Omega^* < (\lambda x \Omega)^*$ et $(\Omega^*)\perp < \Omega^*$ (par (1) et (4)). Prendre $a = \perp$ et f (le code de) la fonction définie par :

$$f(z) = \begin{cases} (\lambda x \Omega)^* & \text{si } z \not\leq (\Omega^*)\perp \\ \Omega^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction f est continue, et qu'on a $(U^*)f\perp = \Omega^*$ et $(V^*)f\perp = (\Omega^*)\perp$ (par (2) et (3')).

2. Il existe $a_0 \in \mathcal{D}$ tel que $(\Omega^*)a_0 \not\leq \Omega^*$. Alors $(\Omega^*)\perp < (\Omega^*)a_0$ (sans quoi on aurait $(\Omega^*)a_0 \leq \Omega^*$, par (2)). Prendre $a = a_0$ et f (le code de) la fonction définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \Omega^* & \text{si } z \not\leq \Omega^* \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction f est continue, et qu'on a $(U^*)fa_0 = (\Omega^*)\perp$ et $(V^*)fa_0 = (\Omega^*)a_0$ (par (3')).

□

Lemme 3.3.4

- (i) Les modèles \mathcal{P} vérifient les quatre conditions du lemme précédent.
- (ii) Les termes U et V sont égalisés dans \mathcal{P} .

Preuve (i) Suit immédiatement du lemme 3.1.2.

(ii) Les termes U et V sont égalés dans \mathcal{P} ssi $(U^*)fa = (V^*)fa$, pour tous $a, f \in \mathcal{P}$. Les modèles \mathcal{P} étant extensionnels, il existe une fonction stable \hat{f} de \mathcal{P}^2 dans \mathcal{P} telle que $\hat{f}(u, v) = (f)uv$, pour tout $(u, v) \in \mathcal{P}^2$. Le lemme 3.1.1 nous donne :

$$(U^*)fa = p_0 \cap U_1[f/x, a/z]^* \cap U_2[f/x, a/z]^* \quad \text{et} \quad (V^*)fa = p_0 \cap V_0[f/x, a/z]^*.$$

Or $U_1[f/x, a/z]^* = \hat{f}((\Omega^*)a, \Omega^*)$ et $U_2[f/x, a/z]^* = \hat{f}(\Omega^*, (\Omega^*)a)$. Comme $(\Omega^*)a \subseteq \Omega^*$ pour tout $a \in \mathcal{P}$, d'après le lemme 3.1.1, on peut employer la stabilité de \hat{f} :

$$\hat{f}((\Omega^*)a, \Omega^*) \cap \hat{f}(\Omega^*, (\Omega^*)a) = \hat{f}((\Omega^*)a, (\Omega^*)a) = V_0[f/x, a/z]^*.$$

Donc $(U^*)fa = (V^*)fa$, pour tous $a, f \in \mathcal{P}$.

□

Cela établit le théorème 3.3.1, et termine notre preuve sémantique de l'incomplétude de la classe des modèles continus.

Proposition 3.3.5 *La théorie du modèle de Park continu est incomparable avec celle de son analogue stable et avec celle de son analogue fortement stable.*

Preuve Notons \mathcal{P}_c le modèle de Park continu. On a $Th(\mathcal{P}) \not\subseteq Th(\mathcal{P}_c)$ par ce qui précède (il suffit de considérer U et V). Le résultat inverse suit de ce que \mathcal{P}_c égalise tous les termes non résolubles clos d'ordre zero [37], alors que \mathcal{P} distingue, par exemple, Ω et $(\Omega)\lambda x \Omega$ (lemme 3.1.2).

□

3.4 Renforcement des résultats d'incomplétude

Dans cette section, nous montrons que l'incomplétude de la classe des modèles stables et celle de la classe des modèles continus sont dues à un ensemble fini très simple d'équations et d'inéquations entre termes du λ -calcul pur.

Définition 3.4.1 *Etant donné un ensemble \mathcal{F} fini d'équations et d'inéquations, nous dirons qu'une λ -théorie T **contient** \mathcal{F} si :*

1. *les équations de \mathcal{F} appartiennent à T ,*
2. *$u = v$ n'appartient pas à T si $u \neq v$ appartient à \mathcal{F} .*

*Nous dirons que \mathcal{F} est **consistant** s'il existe une λ -théorie qui le contient, et que \mathcal{F} est **équivalent à \mathcal{F}'** si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont contenus dans les mêmes λ -théories.*

Noter que si T est une λ -théorie contenant \mathcal{F} et si $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, alors T contient \mathcal{F}' .

Soient $\epsilon = \lambda y \lambda x (y)x$ et $I = \lambda x x$. Posons :

$$\mathcal{F}_1 = \{\epsilon = I, (\Omega)\Omega = \Omega, X = Z, (\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\epsilon = I, (\Omega)\Omega = \Omega, \lambda x (\Omega)(\Omega)x = \Omega, U = V, \lambda x \Omega \neq \Omega\}, \text{ et}$$

$$\mathcal{F} = \{\epsilon = I, (\Omega)\Omega = \Omega, \lambda x (\Omega)(\Omega)x = \Omega, X = Z, U = V, (\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega\}.$$

Proposition 3.4.2 *\mathcal{F} est consistant mais n'a ni modèle continu ni modèle stable.*

Preuve Remarquons \mathcal{F} est équivalent à $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

D'après les lemmes 3.1.2 et 3.3.4 et la proposition 3.2.4 on a $\mathcal{F} \subseteq th(\mathcal{P}_{fs})$.

Le travail effectué dans la section précédente assure que \mathcal{F}_2 n'a pas de modèle continu, et celui effectué en section 3.2 assure que \mathcal{F}_1 n'a pas de modèle stable.

□.

Proposition 3.4.3 *$Th(\mathcal{P}) \subseteq T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$, où \mathcal{P} désigne simultanément \mathcal{P}_s et \mathcal{P}_{fs} et $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$ est la théorie contextuelle induite par l'ensemble des termes essentiellement λI -clos.*

Il est immédiat que Ω et $(\Omega)\lambda x \Omega$ sont distingués dans $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$; pour montrer que \mathcal{F} est inclu dans $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$, il suffit donc de prouver que la partie équationnelle de \mathcal{F} est contenue dans $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$. La preuve de cette proposition étant assez longue et technique, nous lui consacrons la section suivante. Cependant, prouver directement que $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$ contient \mathcal{F} supposerait notamment de montrer que $X = Z$ est une équation de $T_{\Lambda_I}^{\overline{\Omega}}$, ce qui conduirait à une démonstration syntaxique nettement plus compliquée. Par ailleurs la proposition est intéressante en soi puisqu'elle donne un sens opérationnel à l'égalité dans \mathcal{P} .

3.5 La théorie de \mathcal{P}_s et celle de \mathcal{P}_{f_s} sont incluses dans

$$T_{\Lambda_I^0}$$

Pour prouver cette assertion, nous utilisons une notion d'approximation que l'on donne en annexe, page 117.

Rappelons qu'un modèle \mathcal{D} satisfait la **propriété d'approximation** si on peut y interpréter c_0 par $p_0 < (\lambda x x)^*$ de telle sorte que $AF_{p_0}(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ est filtrant et $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = \sqcup AF_{p_0}(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$, pour tout $t[\bar{x}]$ et tout $\bar{a} \in \mathcal{D}^{l(\bar{x})}$.

Revenons maintenant à \mathcal{P} (rappelons que \mathcal{P} désigne simultanément \mathcal{P}_s et \mathcal{P}_{f_s}), et posons $p_0 = \{\alpha_0\}$. On a $p_0 \subset (\lambda x x)^*$ car $\alpha_0 = i(\{\alpha_0\}, \alpha_0)$.

Proposition 3.5.1 *Si on interprète la constante c_0 par p_0 , alors \mathcal{P} satisfait la propriété d'approximation.*

Nous donnons en annexe, page 117, la preuve que tout modèle régulier contenant une suite croissante de projections (p_n) , de sup l'identité, satisfait la propriété d'approximation. C'est le cas de \mathcal{P} : prendre $p_n = \{i(\{\alpha\}, \alpha) ; \alpha \in D_n\}$.

La preuve de cette proposition étant longue et sans difficulté particulière, nous l'omettrons ici.

Nous pouvons maintenant passer à la preuve de la proposition 3.4.3 proprement dite.

La notion de λI -terme (clos) s'étend à $\Lambda(c_0)$ en considérant c_0 comme un λI -terme (clos). Nous désignons par $\overline{\Lambda_I^0}$ (resp. $\overline{\Lambda_I^0}(c_0)$) l'ensemble des termes essentiellement λI -clos de Λ (resp. de $\Lambda(c_0)$), c'est-à-dire l'ensemble des termes qui se β -réduisent à un λI -terme clos.

Commençons par montrer que dans \mathcal{P} , l'interprétation d'un λI -terme clos contient toujours p_0 ($= \{\alpha_0\}$).

Lemme 3.5.2 *Soit $u \equiv u[x, x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{A}$ tel que $x \in Vl(u)$.*

Alors $p_0 \not\subseteq u[\emptyset/x, p_0/x_1, \dots, p_0/x_n]^$.*

Preuve Par induction sur u . On abrège $[\emptyset/x, p_0/x_1, \dots, p_0/x_n]$ en $[\]$.

- Si $u \equiv x$, on a $u[\]^* = \emptyset$.
- Si $u \equiv \lambda y v$, on a $v[c_0/y] \simeq_\beta (\lambda y v)c_0 = (u)c_0$.
Par hypothèse d'induction on a $p_0 \not\subseteq v[c_0/y][\]^*$, puisque $v[c_0/y]$ est β -normal et que $x \in Vl(v[c_0/y])$. Mais $v[c_0/y][\]^* = ((u)c_0)[\]^* = (u[\]^*)p_0$. Si on avait $p_0 \subseteq u[\]^*$, on aurait $v[c_0/y][\]^* \supseteq (p_0)p_0 = p_0$, contradiction.
- Si $u \equiv (\xi)u_1 \dots u_m$, où ξ désigne une variable ou bien c_0 :
 - $\xi \equiv x$ donne $u[\]^* = (\emptyset)u_1[\]^* \dots u_m[\]^* = \emptyset$.

- $\xi \equiv y \neq x$ ou $\xi = c_0$ implique $u[]^* = (p_0)u_1[]^* \cdots u_m[]^*$. Mais $x \in Vl(u)$; il existe donc un j tel que $x \in Vl(u_j)$. L'hypothèse d'induction donne $p_0 \not\subseteq u_j[]^*$; on en déduit $u[]^* = \emptyset$, d'après le lemme 3.1.1.

□

Proposition 3.5.3 *Supposons que $u \in \Lambda_I^0(c_0)$ est β -normal. Alors $u^* \supseteq p_0$. Si de plus u est de la forme $(c_0)u_1 \cdots u_k$, alors $u^* = p_0$.*

Preuve La première partie se montre par induction sur u :

- C'est évident pour $u \equiv c_0$.
- Si $u \equiv (v)w$, alors v et w satisfont les hypothèses de la proposition et on a $p_0 \subseteq v^*$, w^* , par hypothèse d'induction. D'où $(p_0)p_0 = p_0 \subseteq u^*$.
- Si $u \equiv \lambda y v$, alors $Vl(v) = \{y\}$, puisque u est clos, et $v[c_0/y]$ satisfait les hypothèses de la proposition. D'où, par hypothèse d'induction, $p_0 \subseteq (v[p_0/y])^* = ((\lambda y v)^*)p_0 = (u^*)p_0$.

Or $u^* = \{i(k, \beta) ; \beta \in v[k/y]^*, k \text{ minimal pour cette propriété}\}$. On en déduit que, ou bien $i(\emptyset, \alpha_0) \in u^*$, ou bien $i(\{\alpha_0\}, \alpha_0) = \alpha_0 \in u^*$.

En appliquant le lemme précédent à v , on obtient $\alpha_0 \notin v[\emptyset/y]^*$ (car $p_0 = \{\alpha_0\}$). On a donc $p_0 \subseteq u^*$.

Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer qu'on a $u_i^* \supseteq p_0$ pour tout i , puisque les u_i sont β -normaux et dans $\Lambda_I^0(c_0)$; on en déduit $u^* = p_0$, par le lemme 3.1.1.

□

Corollaire 3.5.4 *Soit $t \in \overline{\Lambda_I^0}$. Alors :*

- (i) $t^* \supseteq p_0$;
- (ii) si t est (non résoluble) d'ordre 0, on a $t^* = p_0$.

Preuve (i) Si t se β -réduit à un λI -terme clos t' , il est clair que l'approximant direct t'_0 de t' est un λI -terme clos de $\Lambda(c_0)$. Mais $t'_0 \in \mathcal{A}$, donc on a $(t')^* \supseteq (t'_0)^* \supseteq p_0$, par la proposition précédente.

(ii) Si t est d'ordre de fonctionnalité 0, il se β -réduit à un λI -terme clos t' , qui est aussi d'ordre 0, et donc non résoluble. Tout élément u de $AF(t')$ est de la forme $(c_0)u_1 \cdots u_m$, où les u_i sont aussi des λI -terme clos. La proposition précédente nous donne $u^* = p_0$; on en déduit $t^* = t'^* = p_0$, par la propriété d'approximation.

□

Lemme 3.5.5 *Soit $w \in \mathcal{A}$, un terme clos qui n'est pas essentiellement un λI -terme. Alors $p_0 = \{\alpha_0\} \not\subseteq w^*$.*

Preuve Par induction sur la longueur de w . Noter que l'hypothèse équivaut à $w \notin \Lambda_I$, puisque w est β -normal.

- Si w ne commence pas par λ , il est de la forme $(c_0)w_1 \cdots w_p$, avec w_1, \dots, w_p clos et $w_j \notin \Lambda_I$ pour un certain j . On a alors $p_0 \not\subseteq w_j^*$ par hypothèse d'induction, et donc $w^* = \emptyset$, d'après le lemme 3.1.1.
- Si $w \equiv \lambda x s$, nous distinguons deux cas :
 - $x \notin Vl(s)$. Alors s est clos et on a $w^* = \{i(\emptyset, \beta) \ ; \ \beta \in s^*\}$; d'où $\alpha_0 \notin w^*$.
 - $x \in Vl(s)$. Dans ce cas $s[c_0/x]$ est clos et n'appartient pas à Λ_I . On a donc $\alpha_0 \notin s[\{\alpha_0\}/x]^*$, par hypothèse d'induction.
D'autre part on a $w^* = \{i(k, \beta) \ ; \ \beta \in s[k/x]^*, k \text{ minimal}\}$. Il est alors clair que la condition $\alpha_0 \in w^*$ équivaut à $\alpha_0 \in s[\{\alpha_0\}/x]^*$, ce qui termine la preuve.

□

Pour établir que $Th(\mathcal{P}) \subseteq T_{\overline{\Lambda_I^0}}$, il suffit de montrer que \mathcal{P} n'égalise jamais un terme essentiellement λI -clos à un terme qui ne l'est pas. En effet, supposons que \mathcal{P} satisfait cette propriété et prenons u, v tels que $u \equiv_{\mathcal{P}} v$. On a alors $C[u] \equiv_{\mathcal{P}} C[v]$ pour tout contexte $C[\]$, et donc $C[u] \in \overline{\Lambda_I^0}$ ssi $C[v] \in \overline{\Lambda_I^0}$.

Soit donc $u \in \overline{\Lambda_I^0}$ et $v \notin \overline{\Lambda_I^0}$. On a $u^* \supseteq p_0$, d'après le corollaire 3.5.4.

Notons qu'un terme essentiellement λI -clos est un terme qui est essentiellement clos et essentiellement un λI -terme, et distinguons deux cas :

Si v n'est pas essentiellement clos, il existe une variable libre x de v qui figure dans tous les éléments de $AF(v)$. Soit alors $[\]$ une interprétation des variables libres de v dans laquelle x est interprétée par \emptyset et les autres variables sont interprétées par p_0 . On a $p_0 \not\subseteq w[\]^*$, pour tout $w \in AF(v)$ (lemme 3.5.2) ; donc $p_0 \not\subseteq v[\]^*$ par la propriété d'approximation, et $u \not\equiv_{\mathcal{P}} v$.

Si v est essentiellement clos mais n'est pas essentiellement un λI -terme, alors v se β -réduit à un terme clos v' qui n'est pas essentiellement un λI -terme. Montrons que $p_0 \not\subseteq v'^* = v^*$. Tout élément de $AF(v')$ est clos et n'est pas un λI -terme ; d'après la propriété d'approximation, il nous suffit d'établir que $p_0 \not\subseteq w^*$ pour tout $w \in AF(v')$. Ceci est assuré par le lemme précédent.

Cela établi la proposition 3.4.3, et prouve que $T_{\overline{\Lambda_I^0}}$ contient \mathcal{F} .

Chapter 4

Forcing et résultats d'incomplétude

Nous montrons dans ce chapitre deux choses :

- l'incomplétude stable en utilisant un modèle continu, c'est à dire cette fois sans utiliser la notion de forte stabilité;
- l'incomplétude de la classe des i -modèles fortement stables en utilisant ce même modèle continu.

L'idée est d'utiliser la différence existant au niveau fonctionnel entre l'ordre des modèles continus d'une part, et celui des modèles stables et fortement stables, de l'autre. Dans le cas continu il s'agit de l'ordre extensionnel et dans les cas stables et fortement stables il s'agit de l'ordre stable.

L'incomplétude stable

La première idée suggérée par les résultats du chapitre précédent, est la suivante : Construire un modèle continu extensionnel \mathcal{D}_i satisfaisant $\Omega \leq_{\mathcal{D}_i} \lambda x \Omega$ et un ensemble d'équations et d'inéquations F alors que dans tout modèle stable satisfaisant F on a Ω et $\lambda x \Omega$ incompatibles (nous choisissons d'utiliser les termes Ω et $\lambda x \Omega$ tout d'abord par référence au chapitre précédent, on verra qu'en fait ce choix s'avère être adéquat). Ainsi dans tout ces modèles stables nous aurons l'existence d'une fonction g (stable) telle que $g(\lambda x \Omega^*) = \perp$ et $g(\Omega^*) = \Omega^*$.

Evidemment cette fonction n'existe pas dans \mathcal{D}_i car elle n'y serait pas croissante. On peut alors espérer trouver deux termes T_1 et T_2 égalisés dans le modèle continu et distingués par la fonction g dans tout modèle stable qui satisfait \mathcal{F} .

On a montré dans le chapitre précédent que dans tout modèle stable satisfaisant l'ensemble $F = \{(\Omega)\Omega = \Omega, (\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega\}$ on a Ω^* et $\lambda x \Omega^*$ incompatibles. Toutefois on verra page 99 que dans tout modèle monotone satisfaisant F les interprétations de Ω et $\lambda x \Omega$ sont incomparables.

Cet ensemble F ne nous permet donc pas d'atteindre la situation décrite dans le paragraphe précédent.

Cependant on va réussir à construire dans ce chapitre, en utilisant une technique de forcing, un modèle de segments initiaux \mathcal{D}_i qui :

- satisfait un ensemble \mathcal{F}_1 , fini, simple, et contenant F , d'équations et d'inéquations et;
- égalise des termes T_1 et T_2 simples.

Puis nous montrerons que dans tout modèle stable (DI-domaine réflexif) satisfaisant \mathcal{F}_1 , les termes T_1 et T_2 sont différenciés par des fonctions stables (qui n'existent pas dans \mathcal{D}_i).

L'incomplétude fortement stable

Une des fonctions stables utilisées pour distinguer T_1 et T_2 n'est pas forcément fortement stable, c'est à dire qu'on ne peut pas garantir sa forte stabilité dans le cadre général des DIC réflexifs (voir l'exemple page 52. Ceci empêche d'utiliser le modèle \mathcal{D}_i et les termes T_1 et T_2 pour montrer l'incomplétude de la classe de *tous* les modèles fortement stables. En revanche on peut, en utilisant \mathcal{D}_i et les termes T_1, T_2 , montrer l'incomplétude de la classe des *i*-modèles fortement stables.

La forte stabilité dépend de la cohérence que l'on se donne sur un DI-domaine. Dans le cadre très général des DIC réflexifs on ne peut pas dire grand chose sur la cohérence sinon que celle-ci est acceptable (voir la définition 2.3.3). Les seules fonctions dont on est sûr qu'elles soient toujours fortement stables, sont les fonctions en estrade (page 42).

Supposons maintenant que nous nous restreignons à la classe des *i*-modèles fortement stables que nous avons définie dans le deuxième chapitre, c'est à dire la classe des modèles fortement stables engendrés par une hypercohérence H et un isomorphisme de $H \Leftrightarrow H$ vers H (voir page 65). Dans ces modèles, la cohérence est fortement liée au domaine ce qui permet d'avoir un contrôle beaucoup plus grand sur celle-ci. En particulier dans ce cadre les fonctions utilisées pour établir l'incomplétude stable sont toutes fortement stables (et on en déduira l'incomplétude de la classe des *i*-modèles fortement stables).

Fixons quelques points de terminologies.

Dans un modèle \mathcal{D} on désigne par t^* l'interprétation d'un terme clos t dans \mathcal{D} . On désigne par \leq l'ordre de \mathcal{D} , par $=$ l'égalité induite et \perp désigne le plus petit élément du modèle.

L'ordre, \leq , et l'égalité, $=$, du modèle \mathcal{D} , induisent les deux relations suivantes sur l'ensemble des λ -termes :

$$t_1 \leq_{\mathcal{D}} t_2 \Leftrightarrow t_1^* \leq t_2^*;$$

$$t_1 =_{\mathcal{D}} t_2 \Leftrightarrow t_1^* = t_2^*.$$

On note $\lambda x_1 \cdots \lambda x_n T^*$ l'interprétation du terme $\lambda x_1 \cdots \lambda x_n T$ dans le modèle \mathcal{D} .

Dans le paragraphe suivant nous tentons de donner les intuitions et les schemas des idées et techniques utilisées dans ce chapitre.

On veut exploiter la différence d'ordre existant entre les modèles continus d'une part (ordre extensionnel) et les modèles stables et fortement stables d'autre part (ordre stable). Pour cela on se sert de **fonction test** qui nous indiquent où l'on se situe dans le modèle ceci relativement à certains points particuliers. Ce type de fonctions nous intéresse directement car ces fonctions dépendent directement de l'ordre du modèle.

Une fonction test pour les points a_1, \dots, a_n d'un modèle continu \mathcal{D} est la fonction f de \mathcal{D} vers \mathcal{D} définie par :

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & x \geq a_1 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & x \geq a_n \\ d & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour qu'une telle fonction soit continue il faut que les points a_1, \dots, a_n soient des compacts de \mathcal{D} et que $c_1 \geq \dots \geq c_n \geq d$.

Ce qui nous intéresse est d'avoir un modèle \mathcal{D} dans lequel on a ce type de fonction représenté par un terme. De plus il est également intéressant de disposer de fonctions test relativement à certaines interprétations de termes. Ceci se traduit par le fait que l'on veut un modèle \mathcal{D} et des termes $T, T_1, \dots, T_n, U_1, \dots, U_n, U \in \Lambda^0$ tels que :

- $T_1^* > \dots > T_n^* > U^*$ et $U_1^* > \dots > U_n^*$.

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$ $(T^*)x = \begin{cases} T_1^* & x \geq U_1^* \\ \vdots & \vdots \\ T_n^* & x \geq U_n^* \\ U^* & \text{sinon} \end{cases}$

Le terme T représente alors une fonction test dans \mathcal{D} relativement aux termes U_1, \dots, U_n . De plus on peut alors donner de nombreuses équations et inéquations satisfaites dans le modèle \mathcal{D} . Par exemple $(T)U_1 = T_1$ et $(T)U_1 \neq (T)U_2$.

L'inconvénient d'un tel terme T est qu'essentiellement il ne teste qu'un argument. Si on considère $(T^*)xy$ avec $x \geq U_1^*$ alors $(T^*)xy = (T_1^*)y$. Pour pouvoir de nouveau tester y il faut que le terme T_1 soit lui même un terme représentant une fonction test. Suivant le nombre d'arguments que l'on veut pouvoir tester avec T il nous faut s'assurer que les résultats obtenus à chaque test soient toujours des fonctions test. Pour cela on va introduire des fonctions **auto-test** qui sont des fonctions *inductivement* de test. Une fonction auto-test est une fonction test qui rend pour valeur des fonctions auto-test.

Afin de pouvoir tester un nombre quelconque (fini) d'arguments on a besoin de définition **récursive** de fonctions auto-test. C'est à dire de fonctions f telles que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x)$ est une fonction auto-test (la valeur de $f(x)$ étant déterminée par la position de x par rapport à certains points) et il existe $y \in \mathcal{D}$ tel que $f(y) = f$. De telles fonctions sont décrites par un **système de tests**.

Nous nous contentons de donner un exemple d'un tel système; on va décrire celui dont nous nous servons dans la suite de ce chapitre pour établir les résultats d'incomplétude.

Soit \mathcal{D} un modèle continu et $W_0, W_1, W_2, W_3, w, v, u \in \Lambda^0$ avec:

- $W_0^* < W_1^* < W_2^* < W_3^* < W_4^*$ et $w^* < v^* < u^*$.

$$\bullet (W_1^*)x = \begin{cases} W_3^* & x \geq u^* \\ W_2^* & v^* \leq x < u^* \\ W_1^* & w^* \leq x < v^* \\ W_0^* & \text{sinon} \end{cases} \quad \bullet (W_2^*)x = \begin{cases} W_3^* & x \geq u^* \\ W_2^* & v^* \leq x < u^* \\ W_1^* & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bullet (W_3^*)x = \begin{cases} W_3^* & x \geq u^* \\ W_2^* & \text{sinon} \end{cases} \quad \bullet (W_0^*)x = \begin{cases} W_3^* & x \geq u^* \\ W_2^* & v^* \leq x < u^* \\ W_0^* & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ainsi un système de tests récursif de fonctions auto test, représentées par les termes W_1, W_2, W_3 et W_0 , qui testent leurs arguments relativement aux termes u, v, w .

Insistons sur le fait que ceci n'est qu'un exemple particulier de tels systèmes. C'est exactement ce système, où les termes seront instanciés par des termes particuliers, que l'on utilise dans la suite de ce chapitre (voir le lemme 4.2.6).

Si on a un tel modèle \mathcal{D} on peut alors dire beaucoup de choses sur la théorie de celui-ci :

- On peut, comme on l'a déjà explicité précédemment, dégager très facilement de nombreux ensembles \mathcal{F} d'équations et d'inéquations satisfaits dans \mathcal{D} .
- On peut facilement trouver de nouvelles équations satisfaites dans ce modèle, ceci en utilisant l'ordre induit par \mathcal{D} .

Donnons un exemple, qui est celui utilisé dans la suite de ce chapitre (voir le lemme 4.2.11). Considérons les termes :

$T_1 = \lambda x (W_2)(x)U_1(x)U_2$ et $T_2 = \lambda x (W_1)(x)U_2$ où U_1 et U_2 sont deux termes clos tels que $U_1^* < U_2^*$.

Alors on montre facilement que $T_1 = T_2$ est satisfaite dans \mathcal{D} .

Remarquons que pour tout $x \in \mathcal{D}$ tel que $v^* \leq x$ $(W_1^*)x = (W_2^*)x = (W_3^*)x$.

Soit $f \in \mathcal{D}$ alors $(T_1^*)f = (W_2^*)(f)U_1^*(f)U_2^*$ et $(T_2^*)f = (W_1^*)(f)U_2^*$.

- $v^* \not\leq (f)U_1^*$. Alors $(T_1^*)f = (W_1^*)(f)U_2^* = (T_2^*)f$.
- Sinon $v^* \leq (f)U_1^*$ et par croissance $v^* \leq (f)U_2^*$ puisque $U_1^* < U_2^*$. Ainsi dans ce cas $(T_1^*)f = (W_3^*)(f)U_2^*$ ou $(W_2^*)(f)U_2^*$ ce qui est égal à $(W_1^*)(f)U_2^* = (T_2^*)f$.

On peut ainsi jouer avec les termes W_1, W_2 et W_3 pour égaliser certains termes, ceci de façon étroitement liée à l'ordre du modèle (dans l'exemple donné ci dessus on utilise explicitement le fait que $U_1^* < U_2^*$). On peut évidemment trouver d'autres termes égalisés

dans \mathcal{D} , toujours en utilisant le système donné en exemple.

Les termes T_1 et T_2 décrits dépendent du choix des termes U_1 et U_2 qui est arbitraire sous réserve que $U_1^* < U_2^*$.

Supposons maintenant que l'on a un modèle continu \mathcal{D} tel que le système de tests donné en exemple soit satisfait dans ce modèle (on montre dans ce chapitre qu'il existe une solution concrète à ce problème).

On veut dégager du système un ensemble \mathcal{F} d'équations et d'inéquations tel que dans tout modèle stable (et fortement stable) \mathcal{D}_s satisfaisant \mathcal{F} les interprétations de U_1 et U_2 soient incomparables ou mieux incompatibles. Ceci nous permettra de montrer que dans tous ces modèles stables (et fortement stables) on peut séparer les termes T_1 et T_2 . On obtient ainsi le résultat d'incomplétude voulu. Bien sûr il faut s'assurer que de tels termes U_1 et U_2 existent.

Supposons que l'on est bien dans ce cas, c'est à dire que dans le modèle continu \mathcal{D} considéré on peut trouver :

- U_1 et U_2 deux termes tels que $U_1^* < U_2^*$.
- Un ensemble d'équations et d'inéquations \mathcal{F}_{incomp} satisfaites dans \mathcal{D} , tel que dans tout modèle stable $\mathcal{D}_s \models \mathcal{F}_{incomp}$ alors U_1^* et U_2^* sont incompatibles dans \mathcal{D}_s .

Puisque l'on a supposé que \mathcal{D} satisfait le système donné il est clair que également $\mathcal{D} \models F_0$ où $F_0 = \{W_2 \neq W_3, (W_2)u = W_3, (W_3)w = W_1, (W_1)u = W_3\}$ (cet ensemble est directement donné par la lecture du système). Ainsi $\mathcal{D} \models \mathcal{F}$ où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{incomp} \cup F_0$.

Considérons un modèle stable \mathcal{D}_s satisfaisant \mathcal{F} . Alors dans \mathcal{D} les interprétations de U_1 et U_2 sont incompatibles. Alors il existe une fonction stable g de \mathcal{D}_s dans \mathcal{D}_s telle que $g(U_1^*) = u^*$ et $g(U_2^*) = w^*$. Une telle fonction f continue de \mathcal{D} dans \mathcal{D} n'existe pas car alors elle ne serait pas croissante puisque dans le modèle \mathcal{D} $U_1^* < U_2^*$ et $w^* < u^*$.

On montre maintenant que dans tout modèle stable \mathcal{D}_s les termes T_1 et T_2 sont distingués. Appelons g le code de la fonction g . Alors, puisque \mathcal{D}_s satisfait F_0 :

- $(T_1^*)g = (W_2^*)(g)U_1^*(g)U_2^* = (W_2^*)u^*w^* = (W_3^*)w^* = W_2^*$.
- $(T_2^*)g = (W_1^*)(g)U_2^* = (W_1^*)u^* = W_3^*$.
- $W_2^* \neq W_3^*$.

On réussit à montrer que $\mathcal{F} \cup \{T_1 = T_2\} \in th(\mathcal{D})$ et pour tout modèle stable \mathcal{D}_s $\mathcal{F} \cup \{T_1 = T_2\} \notin th(\mathcal{D}_s)$ ce qui est un résultat d'incomplétude.

On a décrit de façon relativement générale les techniques que l'on utilise dans la suite. On construit un **modèle extensionnel continu** \mathcal{D}_i dans lequel on a la satisfaction d'une

instance de l'exemple du système que l'on a donné.

Plus précisément dans ce modèle les termes utilisés sont les suivant :

- Ω pour w et W_1 .
- $(\Omega)\lambda x \Omega$ pour U_2, v et W_2 .
- $(\Omega)\lambda x \lambda y \Omega$ pour w et W_3 .
- $\lambda x \Omega$ pour U_1 .

Le lemme 4.2.6 décrit exactement le système de tests que l'on a donné en effectuant les instances ci-dessus. Remarquons toutefois que le terme W_0 est instancié par un point de \mathcal{D}_i que l'on note d que l'on ne donne pas comme l'interprétation d'un terme particulier. On remarque que tous les termes que l'on utilise dépendent exclusivement du terme Ω . Donc la seule chose à faire pour construire le modèle voulu (qui est un modèle de segments initiaux) est de faire en sorte que l'interprétation de Ω soit telle que le modèle satisfasse le système. Pour cela on utilise une technique de forcing qui est décrite page 100. Du fait que l'on est amené à utiliser le forcing, le choix du terme Ω s'est très naturellement imposé.

Terminons par les résultats d'incomplétude. Pour les établir on procède exactement comme dans l'exemple donné. On dégage un ensemble \mathcal{F}_1 d'équations et d'inéquations satisfaites dans \mathcal{D}_i (cet ensemble se déduisant directement du lemme 4.2.6). Puis on montre que dans tous les modèles stables satisfaisant \mathcal{F}_1 les termes $(\Omega)\lambda x \Omega$ et $\lambda x \Omega$ sont incompatibles ou incomparables (voir la démonstration du théorème 4.3.1) et on déduit l'existence de fonctions stables séparant les termes T_1 et T_2 .

De même on montre que dans tous les i -modèles fortement stables satisfaisant \mathcal{F}_1 les termes $(\Omega)\lambda x \Omega$ et $\lambda x \Omega$ sont incompatibles (voir la démonstration du théorème 4.4.2) et on déduit l'existence d'une fonction fortement stable séparant les termes T_1 et T_2 .

4.1 La construction du modèle \mathcal{D}_i

Nous voulons construire un modèle de segment initiaux \mathcal{D}_i qui satisfait l'ensemble \mathcal{F}_1 suivant :

$$\mathcal{F}_1 = \{\epsilon = I, (\Omega)\Omega = \Omega, ((\Omega)\lambda x \Omega)\Omega = \Omega, (\Omega)(\Omega)\lambda x \Omega = (\Omega)\lambda x \Omega, ((\Omega)\lambda x \Omega)(\Omega)\lambda x \Omega = (\Omega)\lambda x \Omega, ((\Omega)\lambda x \Omega)\lambda x \lambda y \Omega = (\Omega)\lambda x \lambda y \Omega, ((\Omega)\lambda x \lambda y \Omega)\Omega = (\Omega)\lambda x \Omega, (\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega\}.$$

Ce modèle satisfera de plus :

$\Omega, \lambda x \Omega <_{\mathcal{D}_i} (\Omega)\lambda x \Omega$ (où $<_{\mathcal{D}_i}$ est l'ordre strict associé à $\leq_{\mathcal{D}_i}$);

$\lambda x \lambda y \Omega, (\Omega)\lambda x \Omega <_{\mathcal{D}_i} (\Omega)\lambda x \lambda y \Omega$;

et égalise deux termes T_1 et T_2 qui seront distingués dans tout modèle stable satisfaisant

\mathcal{F}_1 .

Nous appelleront fragment fondamental de \mathcal{F}_1 l'ensemble :

$$F = \{(\Omega)\Omega = \Omega, (\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega\}.$$

Regardons ce que l'on peut dire sur les interprétations de Ω et $\lambda x \Omega$ dans un modèle de segment initiaux satisfaisant F .

Lemme 4.1.1 *Dans tout modèle monotone \mathcal{D} satisfaisant F , Ω^* et $\lambda x \Omega^*$ sont incomparables et $\Omega^* \neq \perp$.*

Preuve : Puisque \mathcal{D} satisfait $(\Omega)\lambda x \Omega \neq \Omega$ il est clair que $\Omega^* \neq \perp$.

- Si $\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} \Omega$ alors $\Omega =_{\mathcal{D}} (\lambda x \Omega)\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} (\Omega)\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} (\Omega)\Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$. On a donc $(\Omega)\lambda x \Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$ ce qui est une contradiction.
- si $\Omega \leq_{\mathcal{D}} \lambda x \Omega$ alors $\Omega =_{\mathcal{D}} (\Omega)\Omega \leq_{\mathcal{D}} (\Omega)\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} (\lambda x \Omega)\lambda x \Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$ ce qui est une contradiction.

□

4.2 L'interprétation du terme Ω dans un i -modèle continu extensionnel

Nous avons rappelé dans le premier chapitre page 32 la construction de modèle continus extensionnels dans le cadre des espaces de segments initiaux.

Nous nous contentons ici de fixer quelques points de terminologie concernant ces modèles et de faire quelques rappels.

Un modèle de segment initiaux extensionnel \mathcal{D}_i est un triplet $(S(D), F, G)$ engendré par une paire (D, i) où D , la trame du modèle, est un ensemble préordonné par un préordre \leq_i et i est une bijection de $D_f \times D$ dans D . Rappelons que :

$$i(a, \alpha) \leq_i i(b, \beta) \Leftrightarrow s(b) \subseteq s(a) \text{ et } \alpha \leq_i \beta$$

où $s(u)$ désigne le segment initial engendré par la partie finie u de D .

Le domaine $S(D)$ est l'espace des segment initiaux de la trame D et est ordonné par l'inclusion.

Insistons sur le fait que $\leq_{\mathcal{D}_i}$ désigne l'ordre du modèle \mathcal{D}_i et que \leq_i désigne le préordre de la trame D de ce modèle.

On note $\alpha \in_i T$, pour $\alpha \in D$ et $T \in \Lambda$, le fait que $\alpha \in T_{\mathcal{D}_i}^*$.

Et on note $u \subseteq_i T$, pour u un sous-ensemble fini de D , le fait que $u \subseteq T_{\mathcal{D}_i}^*$.

Insistons sur l'interprétation de certains types de termes dans un modèle \mathcal{D}_i .

Soient T, T_1, T_2 trois termes clos. Alors :

$$\lambda x T^* = \{i(a, \theta); \theta \in_i T\};$$

$$\text{et } ((T_1)T_2)^* = (T_1^*)T_2^* = \{\theta; \exists d \subseteq_i T_2 \ i(d, \theta) \in_i T_1\}.$$

Remarquons que si $\alpha \in_i T$, pour T un terme clos, alors $i(a, \alpha) \in_i \lambda x T$ pour tout $a \subseteq_f D$ et $i(a, \alpha) \leq_i i(\emptyset, \alpha)$. Ainsi $\lambda x T^* = s\{i(\emptyset, \alpha); \alpha \in_i T\}$.

Enfin une dernière petite remarque très utile. L'interprétation d'un terme T dans un modèle \mathcal{D}_i est un segment initial. Ainsi, si l'on montre que $u \subseteq_i T$, avec $u \subseteq D$, alors évidemment $s(u) \subseteq_i T$.

Dans un modèle de segments initiaux \mathcal{D}_i , de trame D , on a une condition nécessaire et une condition suffisante très simple d'appartenance, pour un élément de D , à l'interprétation de Ω dans \mathcal{D}_i . C'est pourquoi le choix du terme Ω c'est imposé.

Le résultat suivant est extrait de [40] page 84.

Lemme 4.2.1 1. Pour tout $\alpha, \beta \in D$, $i(\{\beta\}, \alpha) = \beta$ implique $\mathcal{D}_i \models \alpha \in_i \Omega$

2. Si $\mathcal{D}_i \models \alpha \in_i \Omega$ il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ où $\alpha_n \in D$ et $a_n \in D_f$ telles que $\alpha = \alpha_0 \leq_i \dots \leq_i \alpha_n \leq_i \dots$, $\lambda x (x)x^* \supseteq s(a_0) \supseteq \dots \supseteq s(a_n) \supseteq \dots$, et $i(a_{n+1}, \alpha_{n+1}) \in a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

1. On a $i(\{\beta\}, \alpha) \in \{\beta\}$, ainsi $\alpha \in (s\{\beta\})s\{\beta\}$ et ceci entraîne que $i(\{\beta\}, \alpha) \in_i \lambda x (x)x$. D'où $\{i(\{\beta\}, \alpha)\} \subseteq_i \lambda x (x)x$ et donc $\alpha \in_i \Omega$.
2. Le fait que $\alpha \in_i \Omega$ entraîne qu'il existe $a_0 \subseteq_i \lambda x (x)x$ tel que $i(a_0, \alpha) \in_i \lambda x (x)x$. On en déduit que $\alpha \in (s(a_0))s(a_0)$ d'où l'existence de $b_0 \subseteq_f s(a_0)$ tel que $i(b_0, \alpha) \in s(a_0)$. Ainsi $i(b_0, \alpha)$ minore un élément de a_0 et la surjectivité de i nous assure que l'on a $i(b_0, \alpha) \leq_i i(a_1, \alpha_1) \in a_0$ et donc $s(b_0) \supseteq s(a_1)$ et $\alpha_0 = \alpha \leq_i \alpha_1$. Du fait que $s(b_0) \subseteq s(a_0)$, on a $s(a_0) \supseteq s(a_1)$ et puisque $i(a_1, \alpha_1) \in a_0 \subseteq_i \lambda x (x)x$ on a $\alpha_1 \in (s(a_1))s(a_1)$. Et on réitère l'opération.

□

Forcing extensionnel sur les i -modèles continus

Définition 4.2.2 Une condition de forcing est une injection partielle de $D_f \times D$ dans D .

Soit D un ensemble dénombrable et α, β deux éléments de D . On dit que la condition de forcing p **force extensionnellement** $\alpha \leq \beta$, en abrégé $\mathbf{p} \Vdash \alpha \leq \beta$, si pour toute bijection i de $D_f \times D$ prolongeant p on a $\alpha \leq_i \beta$.

On note $p \Vdash \alpha \in s(u)$, où $u \subseteq D$, le fait que $p \Vdash \alpha \leq \beta$ pour un élément $\beta \in u$.

On se donne un ensemble D dénombrable. On fixe une énumération de D , c'est à dire une bijection de \mathbb{N} sur D , et une énumération de $D_f \times D$. Le rang d'un élément θ de D (resp. d'un élément (c, ψ) de $D_f \times D$) est son rang dans l'énumération de D (resp. de $D_f \times D$).

On se donne également $\mathbf{h} \subseteq \mathbf{D}$ et \mathbf{p}_0 une injection partielle de $D_f \times D$ dans D telle que :

1. $D \setminus \text{Im}(p_0)$ est infini.
2. $\text{Dom}(p_0)$ ne contient qu'un nombre fini de couples (c, ψ) tels que c est un singleton.

On va construire par forcing une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ et une suite $(\theta_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D \cup \{*\}$ telle que :

- Le premier élément de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est l'injection partielle p_0 .
- $\forall m \in \mathbb{N} \ p_m = \tilde{p}_m \cup p_0$ avec \tilde{p}_m une injection partielle finie de $D_f \times D$ dans D .
- $\forall m \in \mathbb{N} \ \theta_m \in D \Rightarrow p_m \Vdash \theta_m \in s(\mathbf{h})$.
- Les θ_n différents de $*$ sont distincts deux à deux.
- $i = \bigcup_{n \geq 0} p_n$ est une bijection de $D_f \times D$ sur D .

Supposons que p_m et $\theta_0, \dots, \theta_{m-1}$ soient construit.

On définit alors p_{m+1} en plusieurs étapes.

1. S'il n'existe pas de $\theta \neq \theta_0, \dots, \theta_{m-1}$, tel que $p_m \Vdash \theta \in s(\mathbf{h})$. Alors on pose $p'_m = p_m$ et $\theta_m = *$.
2. S'il existe un tel θ , alors on prend pour θ_m celui de rang minimum.
On considère alors le premier élément de D , que l'on appellera β_m , tel que :

- $\beta_m \notin \text{Im}(p_m)$.
- $(\{\beta_m\}, \theta_m) \notin \text{Dom}(p_m)$

L'existence d'un tel β_m est assuré par les deux hypothèses que satisfait p_0 et par le fait que \tilde{p}_m et de ce fait $p_m = \tilde{p}_m \cup p_0$ sont finies.

On pose $p'_m = p_m \cup \{((\{\beta_m\}, \theta_m), \beta_m)\}$.

3. Soit (c, ψ) le premier élément de $D_f \times D$ tel que $(c, \psi) \notin \text{Dom}(P'_m)$ et η le premier élément de D tel que :

- $\eta \notin \text{Im}(p'_m)$
- $rg(\eta) > rg(\iota)$ pour tout $\iota \in c$.

On pose alors $p_{m+1} = p'_m \cup \{((c, \psi), \eta)\}$.

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est évidemment croissante.

On considère maintenant l'application $i = \bigcup_{n \geq 0} p_n$ de $D_f \times D$ vers D . Il est clair que par construction i est définie partout et injective. Cette injection est de plus surjective car, pour tout γ , $i(\emptyset, \gamma) \in \text{Dom}(i)$: en effet, soit $(\emptyset, \gamma) \in \text{Dom}(p_0)$, soit $i(\emptyset, \gamma)$ est défini à une étape trois.

On obtient un modèle extensionnel $(S(D), F, G)$ que l'on notera dorénavant \mathcal{D}_i .

Lemme 4.2.3 *Dans ce modèle $\Omega^* = s(h)$.*

Preuve :

1. Montrons que $s(h) \subseteq \Omega^*$.

Pour tout $\delta \in h$ on a deux situations possibles.

- (a) Il existe $\delta' \in D$ tel que $(\{\delta'\}, \delta), \delta' \in p_0$ et donc $\delta \in \Omega^*$.
- (b) Sinon on a construit à une étape deux une condition de forcing p_n telle que $(\{\delta'\}, \delta), \delta' \in p_n$, pour un $\delta' \in D$.

2. Montrons que $\Omega^* \subseteq s(h)$. Soit $\beta \in \Omega^*$.

Le lemme 4.2.1 nous assure l'existence de deux suites :

$\beta = \beta_0 \leq_i \beta_1 \leq_i \dots \leq_i \beta_l \leq_i \dots$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \in D$.

$(\lambda x (x)x)^* \supseteq s(b_0) \supseteq \dots \supseteq s(b_n) \supseteq \dots$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in D_f$.

Ces deux suites sont telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i(b_{n+1}, \beta_{n+1}) \in b_n$. Choisissons n tel que le rang de $i(b_n, \beta_n)$ soit minimum.

On a $i(b_{n+1}, \beta_{n+1}) \in b_n$ et $rg(i(b_n, \beta_n)) \leq rg(i(b_{n+1}, \beta_{n+1}))$. Il en résulte que $i(b_n, \beta_n)$ n'est pas obtenu à une étape trois. Sinon $rg(i(b_n, \beta_n)) > rg(b_n)$ ce qui implique que $rg(i(b_n, \beta_n)) > rg(i(b_{n+1}, \beta_{n+1}))$.

Donc $i(b_n, \beta_n)$ est défini à une étape deux, ce qui entraîne que $\beta_n = \alpha_m$ pour un certain entier m . On a $\beta \leq_i \beta_n = \alpha_m$ et $\mathcal{D}_i \models \alpha_m \in s(h)$ donc $\beta \in s(h)$.

□

Le bon choix de h et p_0 .

Considérons l'ensemble suivant $H = \{\alpha, \beta, \epsilon, \gamma_{n \geq 0}, \delta_{n \geq 0}\}$.

Soit p_0 l'injection partielle de $H_f \times H$ dans H définie par :

$$p_0 = \{((\{\alpha\}, \alpha), \alpha), ((\emptyset, \alpha), \beta), ((\{\beta\}, \beta), \gamma_0), ((\emptyset, \gamma_n), \gamma_{n+1})_{n \geq 0}, ((\emptyset, \beta), \epsilon), ((\{\epsilon\}, \epsilon), \delta_0), ((\emptyset, \delta_n), \delta_{n+1})_{n \geq 0}\}.$$

On fixe un ensemble D dénombrable tel que $D \supset H$ et tel que $D \setminus \text{Im}(p_0)$ est infini et on pose $h = \{\alpha, \gamma_{n \geq 0}, \delta_{n \geq 0}\}$.

Remarquons que :

p_0 satisfait les conditions voulues.

$$\gamma_0 = i(\{i(\emptyset, \alpha)\}, i(\emptyset, \alpha)) = i(\{\beta\}, \beta) \text{ et } \delta_0 = i(\{i(\emptyset, i(\emptyset, \alpha))\}, i(\emptyset, i(\emptyset, \alpha))) = i(\{\epsilon\}, \epsilon).$$

On se place dorénavant dans le modèle \mathcal{D}_i construit par le forçage précédent à partir de h et p_0 .

Lemme 4.2.4 1. $\alpha \in \Omega^* = s(h)$.

2. $\alpha \leq_i \beta \leq_i \epsilon$.

Preuve :

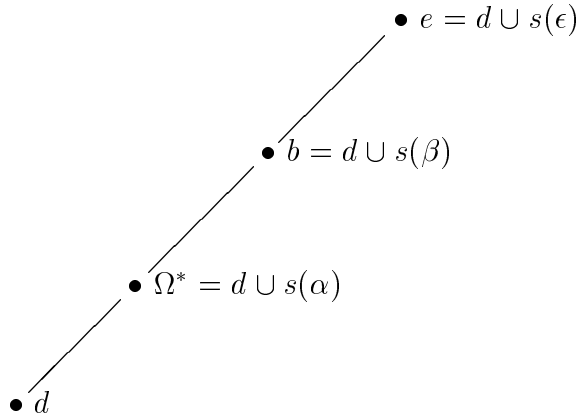
1. La construction par forçage de \mathcal{D}_i nous donne que $s(h) = \Omega^*$ (lemme 4.2.3), donc $\alpha \in \Omega^*$.
2. $\alpha = i(\{\alpha\}, \alpha)$ et $\beta = i(\emptyset, \alpha)$. On a $\emptyset \subseteq \{\alpha\}$ et $\alpha \leq_i \alpha$ donc $\alpha \leq_i \beta$. De plus $\epsilon = i(\emptyset, \beta)$ et puisque $\alpha \leq_i \beta$ on a $\beta \leq_i \epsilon$.

□.

Posons $\mathbf{d} = s\{\gamma_{n \geq 0}, \delta_{n \geq 0}\}$, $\mathbf{b} = \mathbf{d} \cup s(\beta)$ et $\mathbf{e} = \mathbf{d} \cup s(\epsilon)$.

Notons que $\mathbf{d} \subseteq \Omega^* \subseteq \mathbf{b} \subseteq \mathbf{e}$, car $\alpha \leq_i \beta \leq_i \epsilon$.

On a dans ainsi \mathcal{D}_i la situation suivante :



Les inclusions du lemme suivant seront très bientôt remplacées par des égalités (lemme 4.2.6) qui nous permettront de montrer que \mathcal{D}_i satisfait \mathcal{F}_1, \dots et beaucoup d'autres équations et inéquations.

Lemme 4.2.5 *Soit $u \in \mathcal{D}_i$.*

$$\text{On a : } (\Omega^*)u \supseteq \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{si } \beta \in u \\ \Omega^* & \text{si } \alpha \in u \\ d & \text{sinon} \end{cases}, \quad (b)u \supseteq \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{si } \beta \in u \\ \Omega^* & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } (e)u \supseteq \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : Rappelons que $(\Omega^*)u = \{\nu; \exists c \subseteq_f u \ i(c, \nu) \in_i \Omega\}$.

Pour tout $u \in \mathcal{D}_i$ $\emptyset \subseteq u$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $i(\emptyset, \gamma_n) = \gamma_{n+1} \in_i \Omega$ et $i(\emptyset, \delta_n) = \delta_{n+1} \in_i \Omega$.

Ainsi, dans tous les cas, $d \subseteq (\Omega^*)u$.

Il reste à voir que, suivant les cas, ϵ et/ou β et/ou α sont également dans $(\Omega)u$.

1. Supposons que $\epsilon \in u$.
Montrons que $\epsilon \in (\Omega^*)u$.
En effet $\{\epsilon\} \subseteq u$ et $i(\{\epsilon\}, \epsilon) = \delta_0 \in_i \Omega$.
Donc $\epsilon \in (\Omega^*)u$.
2. Supposons que $\beta \in u$.
Montrons que $\beta \in (\Omega^*)u$.
En effet $\{\beta\} \subseteq u$ et $i(\{\beta\}, \beta) = \gamma_0 \in \Omega^*$. Donc $\beta \in (\Omega^*)u$.
3. Supposons que $\alpha \in u$.
Montrons que $\alpha \in (\Omega^*)u$.
En effet $\{\alpha\} \subseteq u$ et $i(\{\alpha\}, \alpha) = \alpha \in \Omega^*$. Donc $\alpha \in (\Omega^*)u$.

Par croissance on sait que, pour tout $u \in \mathcal{D}_i$, $(b)u \supseteq (\Omega^*)u$ et $(e)u \supseteq (b)u$. Les seuls points qui restent à vérifier sont :

$\alpha \in (b)u$ et $\beta \in (e)u$ ceci pour tout $u \in \mathcal{D}_i$.

Ces deux points découlent immédiatement du fait que $\beta = i(\emptyset, \alpha) \in b$ et $\epsilon = i(\emptyset, \beta) \in e$.

□

Lemme 4.2.6 *Soit $u \in \mathcal{D}_i$.*

$$\text{On a } (\Omega^*)u = \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{si } \beta \in u \text{ et } \epsilon \notin u \\ \Omega^* & \text{si } \alpha \in u \text{ et } \beta \notin u \\ d & \text{sinon} \end{cases}, \quad (b)u = \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{si } \beta \in u \text{ et } \epsilon \notin u \\ \Omega^* & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } (e)u = \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : pour suivre l'intuition donnée par les système de tests introduits au début de ce chapitre page 96 on peut vérifier qu'en plus des égalités du lemme on a :

$$(d)u = \begin{cases} e & \text{si } \epsilon \in u \\ b & \text{si } \beta \in u \text{ et } \epsilon \notin u \\ d & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est un exercice facile (et partiellement résolu dans la démonstration du lemme). On ne démontre pas ce fait ici car il est inutile dans la suite.

Preuve du lemme : Il suffit de montrer les points suivants :

- (e) $u \subseteq e$ si $\epsilon \in u$;
- (b) $u \subseteq b$ si $\beta \in u$ et $\epsilon \notin u$;
- (Ω^*) $u \subseteq \Omega^*$ si $\alpha \in u$ et $\beta \notin u$;
- (Ω^*) $u \subseteq d$ si $\alpha \notin u$.

Toutes les autres inclusions se déduisent alors en utilisant la croissance et le lemme précédent.

1. Supposons que $\epsilon \in u$. Montrons que $(e)u \subseteq e$.
Soit $\nu \in (e)u$, on a $c \subseteq_f u$ tel que $i(c, \nu) \in e$.

- (a) $i(c, \nu) \leq_i \epsilon = i(\emptyset, \beta)$. Alors $\nu \leq_i \beta \leq_i \epsilon$ donc $\nu \in e$.
- (b) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_0 = i(\{\beta\}, \beta)$. Alors $\nu \leq_i \beta \leq_i \epsilon$ donc $\nu \in e$.
- (c) $i(c, \nu) \leq_i \delta_0 = i(\{\epsilon\}, \epsilon)$. Alors $\nu \leq_i \epsilon$ donc $\nu \in e$.
- (d) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_{n+1} = i(\emptyset, \gamma_n)$. Alors $\nu \leq_i \gamma_n$ donc $\nu \in e$.
- (e) $i(c, \nu) \leq_i \delta_{n+1} = i(\emptyset, \delta_n)$. Alors $\nu \leq_i \delta_n$ donc $\nu \in e$.

2. Supposons que $\beta \in u$ et $\epsilon \notin u$.

Montrons que $(b)u \subseteq b$.

Soit $\nu \in (b)u$, on a $c \subseteq_f u$ tel que $i(c, \nu) \in b$.

- (a) $i(c, \nu) \leq_i \alpha = i(\{\alpha\}, \alpha)$. Alors $\nu \leq_i \alpha \leq_i \beta$ donc $\nu \in b$.
- (b) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_0$. Alors $\nu \leq_i \beta$ donc $\nu \in b$.
- (c) $i(c, \nu) \leq_i \delta_0$. Alors $s\{\epsilon\} \subseteq s(c)$ ce qui est impossible car ceci entraîne que $\epsilon \in u$.
- (d) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_{n+1}$. Alors $\nu \leq_i \gamma_n$ donc $\nu \in b$.
- (e) $i(c, \nu) \leq_i \delta_{n+1}$. Alors $\nu \leq_i \delta_n$ donc $\nu \in b$.

3. Supposons que $\alpha \in u$ et $\beta \notin u$.

Montrons que $(\Omega^*)u \subseteq \Omega^*$.

Soit $\nu \in (\Omega^*)u$, on a $c \subseteq_f u$ tel que $i(c, \nu) \in_i \Omega$.

- (a) $i(c, \nu) \leq_i \alpha$. Alors $s\{\alpha\} \subseteq s(c)$ et $\nu \leq_i \alpha$ donc $\nu \in_i \Omega$.

(b) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_0$. Alors $s\{\beta\} \subseteq s(c)$ ce qui est impossible car ceci entraîne que $\beta \in u$.

(c) $i(c, \nu) \leq_i \delta_0$. Alors $s\{\epsilon\} \subseteq s(c)$ ce qui est impossible car ceci entraîne que $\epsilon \in u$.

(d) $i(c, \nu) \leq_i \gamma_{n+1}$. Alors $\nu \leq_i \gamma_n$ donc $\nu \in_i \Omega$.

(e) $i(c, \nu) \leq_i \delta_{n+1}$. Alors $\nu \leq_i \delta_n$ donc $\nu \in_i \Omega$.

4. Enfin montrons que si $\alpha \notin u$ alors $(\Omega^*)u \subseteq d$.

Soit $\nu \in (\Omega^*)u$, on a $c \subseteq_f u$ tel que $i(c, \nu) \in_i \Omega$. Dans ce cas on ne peut pas avoir $\{\alpha\}$ inclus dans u et donc $i(c, \alpha)$ ne peut être plus petit que les éléments α , γ_0 et δ_0 . Donc forcément $i(c, \alpha)$ est plus petit que γ_{n+1} ou δ_{n+1} , pour un certain entier n , ce qui entraîne que ν est plus petit que γ_n ou δ_n .

□

De ce lemme on déduit immédiatement les trois corollaires suivants :

Corollaire 4.2.7 Si $\beta \in u$ alors $(\Omega^*)u = (b)u = (e)u$.

Corollaire 4.2.8 $((\Omega)\lambda x \Omega)^* = b$ et $((\Omega)\lambda x \lambda y \Omega)^* = e$

Posons $\mathbf{b} \equiv (\Omega)\lambda x \Omega$ et $\mathbf{e} \equiv (\Omega)\lambda x \lambda y \Omega$ (ainsi $b = b^*$ et $e = e^*$).

Corollaire 4.2.9 $\mathcal{D}_i \models \mathcal{F}_1$ à savoir :

$\{\epsilon = I, (\Omega)\Omega = \Omega, (b)\Omega = \Omega, (\Omega)b = b, (b)b = b, (b)\lambda x \lambda y \Omega = e, (e)\Omega = b, b \neq \Omega\}$.

Il nous reste maintenant à donner deux termes T_1 et T_2 qui sont égalisés dans \mathcal{D}_i et qui seront distingués dans tous les modèles stables satisfaisant \mathcal{F}_1 .

Pratiquement on se sert du fait que l'on a :

$$\Omega^*, \lambda x \Omega^* \subset b$$

Ceci découle du lemme suivant et du fait que Ω^* et $\lambda x \Omega^*$ sont incomparables dans \mathcal{D}_i .

Lemme 4.2.10 On a dans \mathcal{D}_i $\lambda x \Omega^* \subseteq b$.

Preuve On a $\lambda x \Omega^* = \{i(a, \theta); \theta \in \Omega^*\}$. Or $i(a, \theta) \leq_i (\emptyset, \theta)$ ceci pour tout $\theta \in D$. Donc $\lambda x \Omega^* = s(\{i(\emptyset, \theta); \theta \in \Omega^*\}) = s(\{\beta, \gamma_{n \leq 1}, \delta_{n \leq 1}\})$. En effet si on a $\gamma_0 = i(\{\beta\}, \beta) \leq_i i(\emptyset, \theta)$ avec $\theta \in \Omega^*$ alors $\beta \leq_i \theta$ ce qui entraîne que $\beta \in \Omega^*$ ce qui est faux (idem pour δ_0).

Et on vérifie facilement que β, γ_{n+1} et δ_{n+1} sont dans $\lambda x \Omega^*$. Ainsi $\lambda x \Omega^* \subseteq b$. □

Considérons les deux termes suivants :

$$T_1 = \lambda x (b)(x)\lambda x \Omega (x)b$$

$$T_2 = \lambda x (\Omega)(x)b.$$

Lemme 4.2.11 $\mathcal{D}_i \models T_1 = T_2$.

Preuve : Montrons que pour tout $g \in \mathcal{D}_i$ $(T_1^*)g = (T_2^*)g$.

$(T_1^*)g = (b)(g)\lambda x \Omega^*(g)b$ et $(T_2^*)g = (\Omega^*)(g)b$.

Du fait que $\lambda x \Omega^* \subseteq b$ on a $(g)\lambda x \Omega^* \subseteq (g)b$.

On utilise dans la suite cette dernière remarque et le lemme 4.2.6.

Si $\beta \notin (g)\lambda x \Omega^*$ alors $(b)(g)\lambda x \Omega^* = \Omega^*$. Ainsi dans ce cas on a :

$(T_1^*)g = (b)(g)\lambda x \Omega^* (g)b = (\Omega^*)(g)b = (T_2^*)g$.

Si $\beta \in (g)\lambda x \Omega^*$ alors d'une part $\beta \in (g)b$ et d'autre part $(b)(g)\lambda x \Omega^* = b$ ou e .

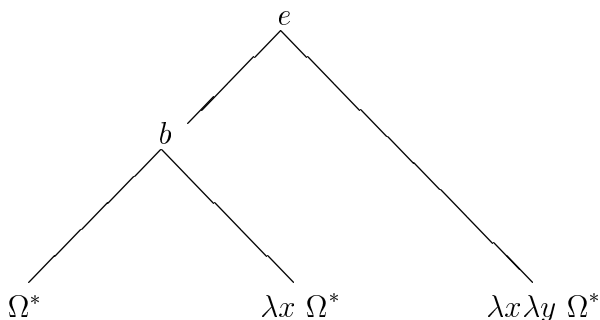
Alors $(T_1^*)g = (b)(g)\lambda x \Omega^* (g)b = (b)(g)b$ ou $(e)g(b)$ ce qui est égal à $(\Omega^*)(g)b$ d'après le corollaire 4.2.7.

Ainsi $(T_1^*)g = (\Omega^*)(g)b = (T_2^*)g$.

□

On dispose maintenant de ce qu'il faut pour montrer les théorème d'incomplétude.

Pour préciser un peu ce qui se passe dans \mathcal{D}_i , il est facile de voir que dans ce modèle on a la situation suivante :



4.3 L'incomplétude stable

Ce paragraphe est constitué uniquement de la démonstration du théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *Aucun modèle stable ne satisfait $\mathcal{F}_1 \cup \{T_1 = T_2\}$.*

Preuve : Soit \mathcal{D} un DI-domaine réflexif qui satisfait \mathcal{F}_1 (où \mathcal{F}_1 est défini comme en 4.1).

Nous montrons que $\mathcal{D} \models T_1 \neq T_2$.

Posons, comme dans la section 4.2, $b = ((\Omega)\lambda x \Omega)^*$.

Les deux cas suivants sont possibles a priori et nous les distinguons :

1. Supposons que $\lambda x \Omega^*$ et b sont incompatibles dans \mathcal{D} .

Alors il existe deux compacts incompatibles k_1, k_2 de \mathcal{D} tels que : $k_1 \leq b$, $k_2 \leq \lambda x \Omega^*$.

La fonction g_1 de \mathcal{D} dans \mathcal{D} définie par :

$$g_1(x) = \begin{cases} \lambda x \lambda y \Omega^* & \text{si } x \geq k_2 \\ \Omega^* & \text{si } x \geq k_1 \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

est stable.

Soit \hat{g}_1 le code de la fonction g_1 dans \mathcal{D} .

Alors $((T_1)\hat{g}_1)^* = (b)g_1(\lambda x \Omega^*)g_1(b) = ((b)\lambda x \lambda y \Omega^*)\Omega^* = (e)b=b$.

Et $((T_2)\hat{g}_1)^* = (\Omega^*)g_1(b) = (\Omega^*)\Omega^* = \Omega^*$.

Puisque \mathcal{D} modélise \mathcal{F}_1 on a $b \neq \Omega^*$ et donc $\mathcal{D} \models T_1 \neq T_2$.

2. Supposons que $\lambda x \Omega^*$ et b sont compatibles dans \mathcal{D} .

Commençons par remarquer que $(\Omega^*)\perp < \Omega^*$ car cette propriété est vraie dans tout modèle stable extensionnel satisfaisant $(\Omega)\Omega = \Omega \neq (\Omega)\lambda x \Omega$ (voir la démonstration page 84 du théorème 3.2.1).

Le fait que $\lambda x \Omega^*$ et b soient compatibles signifie l'existence d'un élément u de \mathcal{D} tel que $\lambda x \Omega^*$, $b \leq u$. On en déduit que $F(b) \leq_s F(u)$ et puisque $\perp \leq \Omega^*$ on a :

$$(b)\perp = F(b)(\perp) = F(u)(\perp) \wedge F(b)\Omega^* = (u)\perp \wedge (b)\Omega.$$

Or $\lambda x \Omega^* \leq u$ entraîne que $\Omega^* \leq (u)\perp$ et puisque \mathcal{D} satisfait \mathcal{F}_1 on a $(b)\Omega = \Omega$ et donc :

$$(b)\perp = \Omega^* \neq (\Omega^*)\perp \quad (1).$$

Remarquons que l'on ne peut pas avoir $\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} b$. En effet cette inégalité entraîne que $\Omega =_{\mathcal{D}} (\lambda x \Omega)b \leq_{\mathcal{D}} (b)b =_{\mathcal{D}} b$. Ainsi on obtiendrait que $\Omega, \lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} b$ contrairement au fait que Ω et $\lambda x \Omega$ ont des interprétations incompatibles dans \mathcal{D} .

De plus, du fait que $(b)b =_{\mathcal{D}} b$ et $b \neq_{\mathcal{D}} \Omega$, on déduit que $\lambda x \Omega \neq_{\mathcal{D}} b$.

Ainsi il existe un compact k de \mathcal{D} tel que : $k \leq \lambda x \Omega$ et $k \not\leq b$.

Considérons la fonction stable g_2 de \mathcal{D} dans \mathcal{D} définie par :

$$g_2(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq k \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit \hat{g}_2 le code de la fonction g_2 dans \mathcal{D} .

Alors $((T_1)\hat{g}_2)^* = (b)g_2(\lambda x \Omega^*)g_2(b) = (b)b\perp = (b)\perp$.

Et $((T_2)\hat{g}_2)^* = (\Omega^*)g_2(b) = (\Omega^*)\perp$.

Donc, en utilisant (1), $\mathcal{D} \models T_1 \neq T_2$.

□

Remarque : Il est facile de montrer que si \mathcal{D} est un i -modèle stable, c'est à dire un modèle engendré par un ensemble cohérent (D, \circlearrowleft) et un isomorphisme d'espace cohérent i de $\mathcal{D}_c \times D$ dans D , alors on est toujours dans le premier cas (celui où $\lambda x \Omega^*$ et b sont incompatibles).

4.4 L'incomplétude fortement stable

Le cadre le plus général dans lequel est défini la forte stabilité est celui des DI-domaines avec cohérence (voir page 41).

On travaille maintenant avec un DIC réflexif $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.

Pour adapter la démonstration du théorème 4.3.1 de la section précédente dans le cadre des DIC réflexifs il suffit de montrer que les fonctions g_1 et g_2 sont fortement stables.

La fonction g_2 l'est car c'est une fonction en estrade (voir le premier exemple de la page 42).

Un problème apparaît pour la fonction g_1 .

En effet g_1 peut envoyer $A \in \mathcal{C}$ sur $\{\Omega^*, \lambda x \lambda y \Omega^*\}$ ou $\{\perp^*, \Omega^*, \lambda x \lambda y \Omega^*\}$ qui ne sont pas forcément dans \mathcal{C} .

Evidemment ceci ne constitue pas une impossibilité de démontrer l'incomplétude fortement stable dans le cadre général des DIC réflexifs. Cela suggère le fait qu'il vaudrait mieux employer des fonctions en estrade, dont on sait qu'elles sont fortement stables dans tous les DIC. C'est une restriction forte qui ne laisse qu'une marge de manœuvre très restreinte. Ce travail reste à faire.

On a vu dans l'exemple 2.6.6 que si on considère des hypercohérences H_1 et H_2 et des compacts h, k de $\mathcal{D}(H_1)$ tels que $\{h, k\} \notin \mathcal{C}(H_1)$ et $c, d \in \mathcal{D}(H_2)$ alors la fonction g de $\mathcal{D}(H_1)$ dans $\mathcal{D}(H_2)$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \geq h, \\ d & \text{si } x \geq k, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

est fortement stable.

On peut montrer que, dans tout i -modèle fortement stable satisfaisant \mathcal{F}_1 , on a :

$\{\lambda x \Omega^*, ((\Omega)\lambda x \Omega)^*\}$ hors de la cohérence.

Ceci nous permettra de montrer que dans ce cadre la fonction g_1 est fortement stable.

Commençons par donner un lemme, valable pour tout DIC.

Lemme 4.4.1 *Soient $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un DIC et $u, v \in \mathcal{D}$.*

Si $\{u, v\} \notin \mathcal{C}$ alors :

- *u et v sont incompatibles.*
- *il existe dans \mathcal{D} deux compacts k_1 et k_2 tels que $k_1 \leq u$, $k_2 \leq v$ et $\{k_1, k_2\} \notin \mathcal{C}$.*

Preuve :

- si $u, v \leq w$ alors $\{u, v\} \sqsubseteq \{w\} \in \mathcal{C}$ ce qui entraîne que $\{u, v\} \in \mathcal{C}$.
- Rappelons que $K(u)$ désigne l'ensemble des compacts inférieurs à u .
On est dans un domaine algébrique donc, $u = \bigsqcup K(u)$, $v = \bigsqcup K(v)$ et $K(u), K(v)$ sont des ensembles filtrants dans \mathcal{D} .

Si, pour tout couple $(k_1, k_2) \in K(u) \times K(v)$, on a $\{k_1, k_2\} \in \mathcal{C}$ alors, d'après la définition d'une cohérence acceptable, $\{u, v\} \in \mathcal{C}$ contrairement à l'hypothèse.

□.

Le reste de cette section est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 4.4.2 *Aucun i -modèle fortement stable ne satisfait $\mathcal{F}_1 \cup \{T_1 = T_2\}$.*

Preuve Nous montrons que si un i -modèle fortement stable $((\mathcal{D}(H), \mathcal{C}(H)), i)$, que l'on note \mathcal{D} , satisfait \mathcal{F}_1 alors $\mathcal{D} \models T_1 \neq T_2$. Remarquons que si \mathcal{D} satisfait \mathcal{F} alors ce modèle est extensionnel donc i est un isomorphisme.

Montrons que $\{b, \lambda x \Omega_{\mathcal{D}}^*\} \notin \mathcal{C}(H)$ où $b = ((\Omega)\lambda x \Omega)^*$.

Rappelons que pour tout $\theta \in_i \Omega$, $i(\emptyset, \theta) \in_i \lambda x \Omega$.

De plus, puisque $(b)\Omega =_{\mathcal{D}} \Omega$ on a, pour tout $\theta \in_i \Omega$, l'existence d'un $h \subseteq_f \Omega$ tel que $i(h, \theta) \in_i b$.

Il existe un $\theta_0 \in_i \Omega$ tel que l'on ait $h_0 \subseteq_i \Omega$, $h_0 \neq \emptyset$ et $i(h_0, \theta_0) \in_i b$. Sinon, pour tout $\theta \in_i \Omega$, on a $i(\emptyset, \theta) \in_i b$ et donc $\lambda x \Omega \leq_{\mathcal{D}} b$ ce qui est contradictoire avec le fait que \mathcal{D} satisfasse \mathcal{F}_1 (voir la démonstration du théorème de la section précédente).

Ainsi l'ensemble $u = \{i(\emptyset, \theta_0), i(h, \theta_0)\} \triangleleft \{\lambda x \Omega_{\mathcal{D}}^*, b\}$.

Et $u = i^\bullet(v)$ avec $v = \{(\emptyset, \theta_0), (h, \theta_0)\}$.

On a $(v)_1 = \{\emptyset, h_0\} \sqsubseteq \{h_0\}$ donc $(v)_1 \in \mathcal{C}^{>1}(H)$ et $(v)_2 = \{\theta_0\} \notin \mathcal{C}^{>1}$. Donc $v \notin \mathcal{C}(H \leftrightarrow H)$ et comme i est un isomorphisme d'hypercohérence, $i^\bullet(v) = u \notin \mathcal{C}$.

On a exhibé une multisection finie et non vide de $\{b, \lambda x \Omega_{\mathcal{D}}^*\}$ qui n'est pas dans la précohérence de H , on en déduit que $\{b, \lambda x \Omega_{\mathcal{D}}^*\} \notin \mathcal{C}(H)$.

Le lemme 4.4.1 nous dit alors qu'il existe deux compacts k_1 et k_2 tels que $k_1 \leq b$, $k_2 \leq \lambda x \Omega^*$ et $\{k_1, k_2\} \notin \mathcal{C}$.

Il en résulte que la fonction g_1 définie par :

$$g_1(x) = \begin{cases} \lambda x \lambda y \Omega^* & \text{si } x \geq k_2 \\ \Omega^* & \text{si } x \geq k_1 \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

est fortement stable (voir l'exemple 2.6.6).

De plus cette fonction sépare les termes T_1 et T_2 .

□

Noter que l'on a utilisé le fait que \mathcal{D} est un i modèle pour montrer que :

1. La fonction g_1 est fortement stable;
2. et $\{b, \lambda x \Omega^*\} \notin \mathcal{C}(H)$.

Conclusion

Cette thèse est une contribution à l'étude des λ -théories atteintes par trois classes de modèles du λ -calculs : les modèles continus, stables et fortement stables. Plus précisément on établit l'incomplétude de la classe des modèles continus (resp. stables) et de la classe des i -modèles fortement stables en montrant que ces trois classes sont incomparables au niveau des théories équationnelles.

Le problème de l'incomparabilité de théories

Dans le cadre de P.C.F. on est confronté à un problème d'incomparabilité équationnelle de trois modèles particuliers (les modèles standards de P.C.F. continu, stable et fortement stable), ce qui ne nécessite pas de donner un caractère uniforme aux raisonnements donnés, il suffit de trouver une équation satisfaite dans chacun de ces modèles et fautive dans les deux autres.

L'analogie de ces résultats d'incomparabilité dans le cadre des modèles du λ -calcul non typé est le problème de la comparaison des théories d'un modèle continu et de ses analogues stable et fortement stable. Par exemple le modèle \mathcal{D}_∞ de Scott et ses analogues stable et fortement stable ont la même théorie, résultat établi par Gouy dans [33]. Ce résultat confirme une conjecture de Honsell et Ronchi énoncée dans [36] et confirme également la radicale distinction qui existe entre le cas typé et le cas non typé.

On montre dans cette thèse que la théorie du modèle de Park continu (\mathcal{P}_c) est incomparable avec la théorie de ses analogues stable (\mathcal{P}_s) et fortement stable (\mathcal{P}_{fs}). Quelle relation existe-t-il entre la théorie de \mathcal{P}_s et celle de \mathcal{P}_{fs} ? Il n'est pas exclu que la théorie du premier soit strictement incluse dans celle du second. En effet, l'argument permettant de montrer que la théorie du modèle de Park continu n'est pas incluse dans celle de son analogue stable (resp. fortement stable) repose sur la nature différente des ordres considérés sur les fonctions (ordre extensionnel dans le cas continu, ordre de Berry dans le cas stable et fortement stable), l'ordre de Berry étant plus contraignant que l'ordre extensionnel. Il en résulte notamment que $\Omega^* < (\lambda x \Omega)^*$ dans le modèle continu, alors que Ω^* et $(\lambda x \Omega)^*$ sont incomparables dans le modèle stable. Or une telle différence n'existe pas entre le modèle stable et le modèle fortement stable.

Les résultats des sections 3.4 et 3.5 donnent le corollaire suivant : il n'existe aucun modèle stable, ni aucun modèle continu, dont la théorie est comprise entre \mathcal{F} , un ensemble fini d'équations et d'inéquations, et $T_{\Lambda_i^0}$, ou entre $Th(\mathcal{P}_{fs})$ et $T_{\Lambda_i^0}$. Il est naturel de se demander si ces deux dernières théories sont les mêmes ou pas.

D'autre part, Honsell et Ronchi ont montré dans [37] que la théorie du modèle de Park continu, \mathcal{P}_c , est strictement incluse dans T_{Λ^0} .

Le tableau suivant résume tout cela (le symbole \asymp signifie que les théories correspondantes sont incomparables) :

	$Th(\mathcal{P}_c)$	$Th(\mathcal{P}_s)$	$Th(\mathcal{P}_{fs})$	T_{Λ^0}	$T_{\Lambda_I^0}$
\mathcal{F}	$\not\subseteq$	$\not\subseteq$	$\not\subseteq$	$\not\subseteq$	$\not\subseteq$
$Th(\mathcal{P}_c)$		\asymp	\asymp	$\not\subseteq$	\asymp
$Th(\mathcal{P}_s)$			$\not\subseteq$ [$? \subseteq$]	\asymp	$\not\subseteq$
$Th(\mathcal{P}_{fs})$				\asymp	\subseteq [$? \neq$]
T_{Λ^0}					\asymp

Le problème de l'incomplétude de classes de modèles

Etablir l'incomplétude d'une classe \mathcal{C} de modèles revient à exhiber une λ -théorie T ou un modèle \mathcal{D} tel qu'on puisse extraire de T ou de $Th(\mathcal{D})$ un ensemble F , le plus simple possible, d'équations et d'inéquations tel que aucun modèle de \mathcal{C} ne satisfait F .

Toute la difficulté réside dans le fait que l'on doit donner des raisonnements valables pour toute la classe de modèles étudiée.

Il est à noter que les méthodes que nous employons relient le problème de l'incomplétude à celui de l'incomparabilité au niveau des théories (ce que l'on appelle l'incomparabilité équationnelle) des classes étudiées.

Honsell et Ronchi ont montré dans [37] que la classe des modèles continus (cpo réflexifs) est incomplète en exhibant une théorie contextuelle particulière, T_{Λ^0} , qui n'est la théorie d'aucun modèle continu. Ce résultat constitue une approche syntaxique de ce problème.

Nous présentons ici une preuve de l'incomplétude de la classe des modèles stables (DI-domaines réflexifs), voir le théorème 3.2.1. Ceci constitue un résultat nouveau et la méthode employée pour y répondre est originale. On montre que la théorie du modèle de Park fortement stable n'est la théorie d'aucun modèle stable et d'aucun modèle continu (théorème 3.3.1) ce qui nous permet d'établir sémantiquement l'incomplétude des sémantiques stable et continue, et donne de plus une distinction équationnelle entre ces classes de modèles.

Dans les sections 3.4 et 3.5 on renforce ces résultats d'incomplétude en exhibant une λ -théorie particulière $T_{\Lambda_I^0}$, qui a un sens opérationnel précis, et qui n'est la théorie d'aucun modèle continu et stable. Pour établir ce résultat on utilise une extension du théorème d'approximation de Honsell et Ronchi aux cadres stable et fortement stable (voir l'annexe A).

Dans le deuxième chapitre on introduit une classe intéressante de modèles du λ -calcul : les i -modèles fortement stables. On dispose dorénavant d'un cadre relativement maniable

pour parler de modèles fortement stables du λ -calcul. Plusieurs questions naturelles se posent dès lors :

- Cette nouvelle classe de modèles est elle incomplète?
- Est elle équationnellement incomparable avec les classes stable et continue?

On montre dans le quatrième chapitre que la classe des i -modèles fortement stables est incomplète (théorème 4.4.2). Pour montrer ceci on exhibe un modèle continu dont la théorie n'est la théorie d'aucun i -modèle fortement stable.

Ce modèle continu permet de plus d'établir l'incomplétude de la classe des modèles stables sans utiliser la forte stabilité.

Les résultats de ce dernier chapitre, combinés à ceux du troisième chapitre, permettent d'établir que la classe des modèles continus est incomparable équationnellement avec la classe stable et la classe des i -modèles fortement stables.

Des questions naturelles restent ouvertes :

1. Peut on trouver un modèle stable dont la théorie n'est la théorie d'aucun modèle fortement stable? Ceci permettrait de montrer l'incomparabilité équationnelle des classes stable et fortement stable.
2. La classe des DIC réflexifs est elle incomplète?

On résume tous les résultats obtenus ainsi que ces dernières questions à l'aide d'un tableau.

Appelons \mathcal{T}_c (resp. \mathcal{T}_{ic}) l'ensemble des théories des modèles continus (resp. des i -modèles continus). De même nous notons respectivement \mathcal{T}_s , \mathcal{T}_{is} , \mathcal{T}_{fs} et \mathcal{T}_{ifs} les ensembles des théories des modèles stables, des i -modèles stables, des modèles fortement stables et des i -modèles fortement stables. Enfin on note par \mathcal{T} l'ensemble des λ -théories.

Le symbole \asymp signifie que les classes de théories correspondantes sont équationnellement incomparables (pour l'inclusion).

	\mathcal{T}	\mathcal{T}_c	\mathcal{T}_s	\mathcal{T}_{fs}	\mathcal{T}_{ifs}	\mathcal{T}_{ic}	\mathcal{T}_{is}
\mathcal{T}		\supseteq \neq	\supseteq \neq	\neq	\supseteq \neq	\supseteq \neq	\supseteq \neq
\mathcal{T}_c			\asymp	\neq [$?$ \asymp]	\asymp	\supseteq [$?$ \neq]	\asymp
\mathcal{T}_s				\neq [$?$ \asymp]	\neq [$?$ \asymp]	\asymp	\supseteq [$?$ \neq]
\mathcal{T}_{fs}					\supseteq [$?$ \neq]	\neq [$?$ \asymp]	\neq [$?$ \asymp]
\mathcal{T}_{ifs}						\asymp	\neq [$?$ \asymp]
\mathcal{T}_{ic}							\asymp

Le mode de lecture de ce tableau est le suivant : $\mathcal{T}_c \subsetneq \mathcal{T}$.

On a également inclus dans ce tableau les questions concernant la comparaison, au niveau équationnel, entre tous les modèles d'une classe et les i -modèles de cette même classe.

Il existe, et ce pour les classes continue, stable et fortement stable, des modèles qui ne sont pas des i -modèles. On peut dire que d'un point de vue structurel, la classe des i -modèles est moins riche que la classe la plus générale. Par exemple tous les i -modèles continus sont des treillis ce qui est loin d'être le cas pour tous les CPO réflexifs. Mais on ne sait pas si la classe des théories des cpo réflexifs est strictement plus grande que celle des i -modèles continus. On a les mêmes questions pour les modèles stables et fortement stables.

Ils serait intéressant de savoir, dans le cas où l'on s'intéresse aux théories, s'il est vraiment utile de travailler en toute généralité, c'est à dire en considérant les classes les plus générales, ou s'il suffit de ne considérer que des classes "plus petites" et surtout ne contenant que des objets "simples". Il est à remarquer que tous les résultats d'incomplétude et de comparaison obtenus dans cette thèse l'ont été en utilisant exclusivement des i -modèles (une raison essentielle à cela est que ces modèles sont de loin les plus faciles à manipuler).

Le problème des comparaisons structurelles

On entend par propriétés structurelles d'une classe de modèles les propriétés liées à la structure des domaines des modèles de la classe considérée.

Jiang a montré que la sémantique continue (ici les domaines de Scott réflexifs) est incompatible avec l'existence d'une rétraction universelle [38]. Ceci provient de l'existence d'une chaîne infinie dense dans les modèles de Scott réflexifs. Par contre tout DI-domaine réflexif satisfait l'existence d'une infinité de rétractions universelles, et on montre dans la dernière section du second chapitre qu'il en est de même pour tous les i -modèles fortement stables. Il serait intéressant de généraliser ce résultat à tous les DIC réflexifs. La démonstration donnée dans le cadre des i -modèles fortement stables utilise fortement les propriétés structurelles de ces modèles (entre autre que ce sont des domaines qualitatifs). Une première étape naturelle serait de montrer que tout domaine qualitatif avec cohérence réflexif admet une infinité de rétractions universelles.

Enfin on donne dans l'annexe B un critère d'isomorphisme applicatif entre i -modèles fortement stables. On montre que si deux paires hypercohérentes sont iH -isomorphes alors les modèles engendrés sont *fortement isomorphes*, ce qui est a priori plus fort que simplement *applicativement isomorphes*.

Dans le cas des i -modèles stables les notions d'isomorphisme fort (c'est à dire ici un isomorphisme applicatif qui est stable et dont l'inverse est stable) et d'isomorphisme applicatif sont équivalentes. Ceci vient du fait que l'on peut exprimer dans la logique du premier ordre sur le langage $L = \{\bullet\}$ (où \bullet représente l'application) le fait que deux éléments sont compatibles.

On ne sait pas si dans le cadre des i -modèles fortement stables il existe, pour tout entier n , une formule (du premier ordre sur L) exprimant le fait que n éléments sont dans la cohérence. Ceci paraît difficile car on a une relative liberté sur le choix de la cohérence, notamment il y a des ensembles non majorés qui sont dans la cohérence.

De ceci découlent deux questions qui sont actuellement ouvertes :

1. Peut on trouver un isomorphisme applicatif Θ entre deux i -modèles fortement stables tel que Θ ne soit pas fortement stable? Ceci impliquerait la non définissabilité

au premier ordre sur L de l'appartenance à la cohérence.

2. Peut on adapter au cadre fortement stable les preuve données par Kerth dans [42] de l'existence de 2^{\aleph_0} modèles de graphes et de 2^{\aleph_0} i -modèles stables non équationnellement équivalents?

Appendix A

La propriété d'approximation

On étend l'utilisation du théorème d'approximation de Honsell et Ronchi à une large classe de modèles. Ceci nous permettra d'utiliser un théorème d'approximation dans les cadres stable et fortement stable.

La notion d'approximation que nous présentons ci-dessous a été introduite par Honsell et Ronchi [37] dans le cadre de la sémantique continue, mais s'étend naturellement à une c.c.c. régulière quelconque. Elle convient à une classe très large de modèles, en particulier à des modèles *non sensibles* (comme le modèle de Park), pour lesquels le théorème d'approximation standard de Wadsworth [69, 70] n'est pas utilisable.

Nous présentons ici la relecture de cette notion donnée dans [32].

Ajoutons une constante c_0 au langage du λ -calcul et considérons le calcul induit par la β -réduction sur $\Lambda(c_0)$. L'ensemble \mathcal{A} des termes β -normaux de $\Lambda(c_0)$ est défini inductivement par les clauses suivantes :

- $c_0 \in \mathcal{A}$;
- $x \in \mathcal{A}$ pour toute variable x ;
- si $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}$ alors $\lambda x_1 \dots \lambda x_n (x)u_1 \dots u_k \in \mathcal{A}$,
et $\lambda x_1 \dots \lambda x_n (c_0)u_1 \dots u_k \in \mathcal{A}$.

Nous appellerons ces termes des *approximants*.

Soit maintenant $t \in \Lambda$. L'*approximant direct* de t est le terme \mathbf{t}_0 de \mathcal{A} obtenu en remplaçant dans t chaque redex $(\lambda x q)r$ par $((c_0)\lambda x q)r$. Il permet de voir canoniquement t comme un terme normal.

L'ensemble des formes normales approchées de t , noté $AF(t)$, est l'ensemble des approximants directs de t et de ses β -réduits :

$$AF(t) = \{t'_0 \ ; \ t \beta t'_0\}.$$

Soit \mathcal{D} un modèle régulier. Pour déterminer l'interprétation des éléments de \mathcal{A} dans \mathcal{D} , il suffit de fixer l'interprétation p_0 de c_0 dans \mathcal{D} . On pose alors $AF_{p_0}(t)_{\bar{x}}^* = \{u_{\bar{x}}^* \ ; \ u \in AF(t)\}$, pour $t \in \Lambda$ et $\bar{x} \supseteq Vl(t)$. En particulier si $t \in \Lambda^0$, $AF_{p_0}(t)^* = \{u^* \ ; \ u \in AF(t)\}$.

Définition A.0.3 *Un modèle \mathcal{D} satisfait la propriété d'approximation si on peut y interpréter c_0 par $p_0 < \lambda x x$ de telle sorte que $AF_{p_0}(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ est filtrant et $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = \sqcup AF_{p_0}(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$, pour tout $t[\bar{x}]$ et tout $\bar{a} \in \mathcal{D}^{l(\bar{x})}$.*

Nous présentons maintenant une classe de modèles réguliers qui satisfont la propriété d'approximation : les modèles stratifiés.

Définition A.0.4 *Soit \mathcal{D} un modèle régulier.*

(i) *Une projection de \mathcal{D} sur \mathcal{D} est un élément π de $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}$ tel que $\pi \circ \pi = \pi$ et $\pi \leq id$; en particulier $\pi(\perp) = \perp$.*

(ii) *Une projection de \mathcal{D} est un élément p de \mathcal{D} tel que $p \leq_{\mathcal{D}} \lambda x x$ et $p \circ p = p$, où $a \circ b$ est par définition $\lambda z (a)(b)z$.*

Il est facile de vérifier que les projections de \mathcal{D} sont exactement les éléments de \mathcal{D} de la forme $G(\pi)$, où π est une projection de \mathcal{D} sur \mathcal{D} (p étant donné, π est l'application $x \rightsquigarrow (p)x$). Noter que $p =_{\mathcal{D}} \lambda x (p)x$ et que $(p)\perp =_{\mathcal{D}} \perp$.

Définition A.0.5 *Un modèle régulier (\mathcal{D}, F, G) est stratifié, s'il existe une suite de projections $(p_n)_{n \in \omega}$ de \mathcal{D} , vérifiant :*

- $p_n \leq_{\mathcal{D}} p_{n+1}$, pour tout n ;
- $\sqcup p_n =_{\mathcal{D}} \lambda x x$;
- $((p_{n+1})a)b = (p_n)(a)(p_n)b$.

Pour montrer que tout modèle stratifié satisfait la propriété d'approximation, nous utilisons un λ -calcul étendu, le λ -calcul étiqueté, défini comme suit :

On se donne un ensemble de constantes $C = \{c_n\}_{n \in \omega}$, les étiquettes. L'ensemble Λ_e des termes étiquetés est le sous-ensemble de $\Lambda(C)$ défini par induction de la manière suivante :

$x \in \Lambda_e$, pour toute variable x ,
 $u, v \in \Lambda_e \Rightarrow (c_n)u, (c_n)\lambda x u$ et $(u)v \in \Lambda_e$.

Remarques

1. Λ_e ne contient aucun c_n ni aucun terme commençant par λ .
2. Tout terme étiqueté est β -normal.
3. Λ_e est clos par substitution d'un terme de Λ_e à une variable libre.

Définition A.0.6

(i) *Un γ -redex est un terme de la forme $((c_{n+1})\lambda x u)v$, son réduit étant $(c_n)u[(c_n)v/x]$;*
(ii) *Un ϵ -redex est un terme de la forme $(c_n)(c_m)u$, son réduit étant $(c_p)u$, où $p = \min(n, m)$.*

Il est facile de vérifier que Λ_e est clos par γ - et ϵ -réductions. On appelle λ -calcul étiqueté le calcul sur Λ_e engendré par les γ - et ϵ -réductions.

Théorème A.0.7 *Le λ -calcul étiqueté est fortement normalisable et Church-Rosser.*

Un théorème analogue est démontré dans [8] ch. 14 pour une extension de ce calcul. Mais il est immédiat de vérifier que le calcul étiqueté défini ci-dessus y est stable, ce qui assure le résultat.

A chaque terme t de Λ_e , on peut associer un terme \tilde{t} de Λ en “oubliant” les étiquettes ; plus précisément, on définit par induction sur les termes étiquetés, une surjection o de Λ_e dans Λ à l’aide des clauses suivantes :

$$\begin{aligned} o(x) &= x \text{ pour chaque variable } x, \\ o((c_n)u) &= \tilde{u}, \\ o((u)v) &= (\tilde{u})\tilde{v}, \\ o((c_n)\lambda x u) &= \lambda x \tilde{u}. \end{aligned}$$

Réciproquement, à chaque terme t de Λ on peut associer l’ensemble $E(t)$ des termes $u \in \Lambda_e$, ϵ -normaux, tels que $\tilde{u} = t$. On a donc $E(t) = \{u \in \Lambda_e, u \text{ } \epsilon\text{-normal}, \tilde{u} = t\}$, et il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} E(x) &= \{x, (c_n)x\} ; & E((u)v) &= \{(w)s, (c_n)(w)s ; w \in E(u), s \in E(v)\} ; & \text{et} \\ E(\lambda x u) &= \{(c_n)\lambda x w ; w \in E(u)\}. \end{aligned}$$

Soit maintenant (\mathcal{D}, p_n) un modèle stratifié. L’interprétation canonique des c_n dans \mathcal{D} consiste à prendre $c_n^* = p_n$. Dans la suite, nous supposerons toujours que les c_n sont interprétés de cette façon. On abrège alors la notation $AF_{p_0}(t)_{\bar{x}}^*$ en $AF(t)_{\bar{x}}^*$, et on pose $E(t)_{\bar{x}}^* = \{u_{\bar{x}}^* ; u \in E(t)\}$, pour tout $t \in \Lambda$ et $\bar{x} \supseteq Vl(t)$.

Proposition A.0.8 *Soit (\mathcal{D}, p_n) un modèle stratifié. Alors :*

- (i) \mathcal{D} est un modèle du λ -calcul étiqueté, c’est-à-dire qu’il écrase la γ - et la ϵ -réduction.
- (ii) $E(t)$ est filtrant pour $\leq_{\mathcal{D}}$ et $t_{\bar{x}}^* = \sqcup E(t)_{\bar{x}}^*$ dans $\mathcal{D}^{l(\bar{x})} \Rightarrow \mathcal{D}$ (pour $\bar{x} \supseteq Vl(t)$ quelconque).

Preuve (i) C’est une conséquence immédiate de la stratification.

(ii) La croissance de la suite (p_n) et le fait que la relation $\leq_{\mathcal{D}}$ passe au contexte assurent que pour tout $t \in \Lambda$, l’ensemble $E(t)$ est filtrant pour $\leq_{\mathcal{D}}$.

Montrons, par induction sur $t[\bar{x}]$, que pour tout $\bar{a} \in \mathcal{D}^{l(\bar{x})}$, $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = \sqcup \{u[\bar{a}/\bar{x}]^* ; u \in E(t)\}$. Nous noterons $E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ ce dernier ensemble et nous abrègerons parfois $t[\bar{a}/\bar{x}]^*$ en $t[\bar{a}]^*$. Rappelons d’autre part que $(a)b$ est une abréviation pour $(F(a))(b)$.

1. $t \equiv x_i$ On a $E(t) = \{(c_n)x_i\}$ et $E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = \{(p_n)a_i\}$.
D’où $\sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = \sqcup (p_n)a_i = (\sqcup p_n)a_i = a_i$ (car F est continue et $\sqcup p_n = id$).
2. $t \equiv (u)v$ Alors $E(t) = \{(w)s, (c_n)(w)s ; w \in E(u), s \in E(v)\}$ et
 $E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = \{(w[\bar{a}]^*)s[\bar{a}]^*, (p_n)(w[\bar{a}]^*)s[\bar{a}]^* ; w \in E(u), s \in E(v)\}$.
De plus $\sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = (\sqcup E(u)_{\bar{a}/\bar{x}}^*) \sqcup E(v)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ (car F est continue et $\sqcup p_n = id$) ;
comme on a $u[\bar{a}]^* = \sqcup E(u)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ et $v[\bar{a}]^* = \sqcup E(v)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ par hypothèse d’induction, on en déduit $t[\bar{a}]^* = \sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$.

3. $t \equiv \lambda x u$ Alors $E(t) = \{(c_n)\lambda x w ; w \in E(u)\}$ et $E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = \{(p_n)G(b \rightsquigarrow w[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^* ; w \in E(u))\}$.

Comme F, G sont continues, et que $\sqcup p_n = id$, on a $\sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* = G(\sqcup A_{\bar{a}})$, où $A_{\bar{a}}$ est $\{b \rightsquigarrow w[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^* ; w \in E(u)\}$.

De plus $A_{\bar{a}}$ est filtrant dans $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}$. En effet, $E(u)$ est filtrant pour $\leq_{\mathcal{D}}$, ce qui signifie que $\{(b, \bar{a}) \rightsquigarrow w[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^* ; w \in E(u)\}$ est filtrant dans $\mathcal{D}^{n+1} \Rightarrow \mathcal{D}$; il en est de même pour $A_{\bar{a}}$ qui s'obtient à partir de l'ensemble précédent en fixant \bar{a} . Mais, le sup de $A_{\bar{a}}$ est le sup extensionnel puisqu'on travaille dans une c.c.c. régulière. Ce sup est donc $b \rightsquigarrow \sqcup \{w[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^* ; w \in E(u)\}$. Or, par hypothèse d'induction $\sqcup \{w[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^* ; w \in E(u)\} = u[b/y, \bar{a}/\bar{x}]^*$; on en déduit $t[\]^* = \sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$.

□

Lemme A.0.9

- (i) $((c_0)\lambda x u)v \leq_{\mathcal{D}} (c_0)u[(c_0)v/x] \leq_{\mathcal{D}} u[(c_0)v/x]$, pour tous u, v dans $\Lambda(\mathcal{D} \cup \{c_0\})$.
(ii) Soient $t, s \in \Lambda$ tels que $t \beta_0 s$. Alors $t_0 \leq_{\mathcal{D}} s_0$, où t_0 et s_0 sont les approximants directs de t et s .

Preuve (i) On a $((c_0)\lambda x u)v \leq_{\mathcal{D}} ((c_1)\lambda x u)v =_{\mathcal{D}} (c_0)u[(c_0)v/x] \leq_{\mathcal{D}} u[(c_0)v/x]$, par stratification.

(ii) Il existe un contexte $C[\]$ et des termes q, r tels que :

$$t = C[(\lambda x q)r] \quad \text{et} \quad s = C[q[r/x]].$$

De plus $t_0 = C_0[((c_0)\lambda x q_0)r_0]$. Notons q'_0 l'approximant direct de $q[r/x]$.

- Si r n'est pas une abstraction on a $q'_0 = q_0[r_0/x]$.
- Sinon, $q'_0 = q_0[(c_0)r_0/x^f, r_0/x^a]$, où x^f désigne les occurrences fonctionnelles de x dans q (i.e. celles précédées de “(”), et x^a les autres.

Dans les deux cas on a $q_0[(c_0)r_0/x] \leq_{\mathcal{D}} q'_0$. D'autre part on a $C_0[q'_0] = s_0$, si $q[r/x]$ ne crée pas de redex dans s , et $C_0[(c_0)q'_0] = s_0$ sinon. Comme $t_0 = C_0[((c_0)\lambda x q_0)r_0] \leq_{\mathcal{D}} C_0[(c_0)q_0[(c_0)r_0/x]] \leq_{\mathcal{D}} C_0[q_0[(c_0)r_0/x]]$ (d'après (i)), on en déduit $t_0 \leq_{\mathcal{D}} s_0$.

□

La propriété de Church-Rosser implique que l'ensemble $AF(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$ est filtrant, pour tout $t \in \Lambda$ et $\bar{a} \in \mathcal{D}^{l(\bar{x})}$. De plus il est clair que $\sqcup AF(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* \leq_{\mathcal{D}} t[\bar{a}/\bar{x}]^*$, puisque $t_0 \leq_{\mathcal{D}} t$ quelque soit t .

Proposition A.0.10 *Tout modèle stratifié satisfait la propriété d'approximation.*

Preuve On a $t[\bar{a}/\bar{x}]^* = \sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$; d'après ce qui précède, il suffit donc de montrer que $\sqcup E(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^* \leq_{\mathcal{D}} \sqcup AF(t)_{\bar{a}/\bar{x}}^*$.

Soit donc $u \in E(t)$ et v sa $\gamma\epsilon$ -forme normale. Si c_n figure dans un sous-terme de v de la forme $((c_n)\lambda x q)r$, nécessairement $n = 0$ puisque v est normal. Soit v' le terme

obtenu en supprimant dans v toutes les étiquettes différentes de ces c_0 . Il est clair que $u =_{\mathcal{D}} v \leq_{\mathcal{D}} v'$; de plus $v' \in AF(t)$. En effet la γ -réduction de u à v dans Λ_e se mime en une β -réduction de t à t' dans Λ ; il est alors clair que $(t')_0 = v'$.

□

Il est facile de vérifier que les modèles \mathcal{P}_s et \mathcal{P}_{fs} utilisés dans le troisième chapitre sont stratifiés : il suffit de prendre $p_n = \{i(\{\alpha\}, \alpha); \alpha \in D_n\}$.

Appendix B

Isomorphismes entre i -modèles fortement stables

Schellinx a montré dans [60] que deux modèles de graphes $\mathcal{D}_{(D_1, i_1)}$ et $\mathcal{D}_{(D_2, i_2)}$ sont applicativement isomorphes si et seulement si les paires $(D_1, i_1), (D_2, i_2)$ sont i -isomorphes. Précisons que $(D_1, i_1), (D_2, i_2)$ sont i -isomorphes s'il existe θ une bijection de D_1 dans D_2 telle que : $\theta i_1(a, \alpha) = i_2(\theta^\bullet(a), \theta(\alpha))$.

Et rappelons que deux i -modèles, $(\mathcal{D}_1, F_1, G_1)$ et $(\mathcal{D}_2, F_2, G_2)$, sont applicativement isomorphes s'il existe une bijection Θ de \mathcal{D}_1 vers \mathcal{D}_2 telle que $\Theta(F_1(u)(v)) = F_2(\Theta(u))(\Theta(v))$ pour tous $u, v \in \mathcal{D}_1$.

Pour établir ce résultat on utilise le fait que l'ordre des modèles de graphes est définissable par une formule de la logique du premier ordre à partir de l'application, résultat montré par Betke.

Plotkin [57] a montré que dans tout CPO réflexif, l'ordre est définissable par une formule de la logique du premier ordre à partir de l'application. La démonstration utilise les propriétés de la topologie de Scott et le fait que l'ordre de ces modèles est extensionnel. Ce résultat très général ne s'adapte pas au cadre des DI-domaines réflexifs car les fonctions utilisées ne sont pas stables. On trouve dans [39] le fait que, dans la classe des analogues stables des modèles de Scott et d'Engeler, l'ordre est également définissable et l'auteur en déduit un critère d'isomorphisme pour ces modèles.

Dans [44] la définissabilité de l'ordre est étendu à la classe de tous les DI-domaines réflexifs et un critère d'isomorphisme pour les i -modèles stables, l'analogue stable du critère de Schellinx, en est déduit.

Nous montrons ici l'analogue de ces résultats pour la classe des i -modèles fortement stables.

B.1 Définissabilité de l'ordre dans les DIC

On dit que l'ordre est définissable à partir de l'application quand l'ordre de chaque modèle de la classe de modèles considérée est définissable, et ce de façon uniforme, dans la logique du premier ordre sur le langage $L = \{\bullet\}$ qui ne comporte qu'un symbole de

fonction binaire.

Kerth a donné une démonstration de la définissabilité de l'ordre dans les domaines de Scott réflexifs. Ceci est un résultat moins général que celui de Plotkin mais sa démonstration s'adapte très facilement au cadre des DI-domaines réflexifs. En fait on remarque ici que nous pouvons également adapter cette démonstration aux DI-domaines avec cohérence réflexifs. Nous renvoyons à [44] pour les démonstrations manquantes.

Théorème B.1.1 *Il existe une formule $LESS(x, y)$ de la logique du premier ordre et du langage $L = \{\bullet\}$ ne comportant qu'un symbole de fonction binaire, telle que dans tout DI-domaine avec cohérence réflexif $\mathcal{D} \neq \{\perp\}$:*

$$\mathcal{D} \models Less(u, v) \Leftrightarrow u \leq v.$$

Preuve : La démonstration donnée dans [44] p. 37-38 est valable sans aucune modification dans le cadre des DIC et nous l'esquissions plus bas. La seule chose à vérifier en plus est la forte stabilité des fonctions utilisées dans cette preuve .

Rappelons d'abord la formule $LESS(x, y)$. On note $s_1 \trianglelefteq_i s_2$ la relation $i \bullet s_1 \bullet s_2 = s_1$ où i est une variable et s_1, s_2 des termes.

$LESS(x, y) := \exists i(\phi(i) \wedge x \trianglelefteq_i y)$ où ϕ est la conjonction des formules ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 suivantes :

$$\phi_1(i) := \forall x, y(x \trianglelefteq_i x \wedge i \bullet x \bullet y = i \bullet y \bullet x)$$

$$\phi_2(i) := \forall x, y, z(x \trianglelefteq_i y \Rightarrow (z \bullet x) \trianglelefteq_i (z \bullet y))$$

$$\phi_3(i) := \exists b(\forall x b \trianglelefteq_i x \wedge \forall z \exists t \forall x((x \trianglelefteq_i z \Rightarrow t \bullet x = b) \wedge (x \not\trianglelefteq_i z \Rightarrow t \bullet x = z))).$$

Donnons une idée de la preuve :

(\Rightarrow) On considère pour i le code de la fonction Inf de \mathcal{D}^2 vers \mathcal{D} qui à deux éléments a, b associe leur inf $a \wedge b$. Il est clair que i satisfait ϕ_1 et ϕ_2 par monotonie.

Pour montrer que i satisfait ϕ_3 on considère $b = \perp$. Alors $u \leq v \Leftrightarrow \mathcal{D} \models Less(u, v)$.

(\Leftarrow) Le but est de montrer que la relation définie par la formule $LESS$ ne peut être que \leq ou \geq et à éliminer ce dernier cas. Dans cette partie de la démonstration les seules fonctions utilisées sont, en plus de la fonction inf , des fonctions en estrade, f_{c, w_1, w_2} .

Vérifions que toutes les fonctions utilisées sont bien fortement stables.

Soit $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un DI-domaine avec cohérence.

1. La fonction Inf de \mathcal{D}^2 vers \mathcal{D} est définie par $\bigwedge(x, y) = x \wedge y$. Il est bien connu que cette fonction est stable.
Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}^2$. Pour tout $i \leq n$, $a_i \in \mathcal{D}^2$ et on identifie a_i avec (b_i, c_i) où $b_i, c_i \in \mathcal{D}$.

Alors $\text{inf}^\bullet(A) = \{b_1 \wedge c_1, \dots, b_n \wedge c_n\} \sqsubseteq \{b_1, \dots, b_n\} = (A)_1 \in \mathcal{C}$ par définition de la cohérence produit.

Et il est évident que $\text{Inf}(\sqcap A) = \sqcap \text{Inf}^\bullet(A)$.

2. Soient $c \in \mathcal{D}_c$ et $w_1, w_2 \in \mathcal{D}$ tels que $w_1 \leq w_2$. On définit la fonction f_{c,w_1,w_2} de \mathcal{D} vers \mathcal{D} par :

$$f_{c,w_1,w_2}(x) = \begin{cases} w_1 & \text{si } c \not\leq x, \\ w_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue car c est compact.

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}$. Il est clair que $\epsilon_{c,w}^\bullet(A)$ ne peut être que $\{w_1\}$ ou $\{w_1, w_2\}$ ou $\{w_2\}$. Dans les trois cas on a $\epsilon_{c,w}^\bullet(A) \sqsubseteq \{w_2\} \in \mathcal{C}$ par définition de la cohérence.

Montrons maintenant que $f_{c,w_1,w_2}(\sqcap A) = \sqcap f_{c,w_1,w_2}^\bullet(A)$.

- Si $f_{c,w_1,w_2}(\sqcap A) = w_1$ alors $c \not\leq \sqcap A$ donc il existe un $i \leq n$ tel que $c \not\leq a_i$. On a alors soit $\sqcap f_{c,w_1,w_2}^\bullet(A) = \sqcap \{w_1, w_2\} = w_1$ soit $\sqcap f_{c,w_1,w_2}^\bullet(A) = \sqcap \{w_1\} = w_1$.
- si $f_{c,w_1,w_2}(\sqcap A) = w_2$ alors, pour tout $i \leq n$, $c \leq a_i$ ce qui entraîne que $c \subseteq \sqcap A$. Ainsi $\sqcap f_{c,w_1,w_2}^\bullet(A) = \sqcap \{w_2\} = w_2$.

□

Corollaire B.1.2 *Il existe des formules de la logique du premier ordre et du langage $\{\bullet\}$, $BOT(x)$, $SUP(x, y, z)$, $Inf(x, y, z)$, $COMPACT(x)$ et $PRIME(x)$ telles que pour tout DI-domaine avec cohérence $\mathcal{D} \neq \{\perp\}$,*

1. $\mathcal{D} \models BOT(u) \Leftrightarrow u = \perp$,
2. $\mathcal{D} \models SUP(u, v, w) \Leftrightarrow u \vee v = w$,
3. $\mathcal{D} \models Inf(u, v, w) \Leftrightarrow u \wedge v = w$,
4. $\mathcal{D} \models COMPACT(u) \Leftrightarrow u$ est compact ,
5. $\mathcal{D} \models PRIME(x) \Leftrightarrow x$ est premier .

Preuve :[44] Pour les trois premières formules la traduction de ces notions en formule de la logique du premier ordre utilisant $LESS(x, y)$ est triviale. Pour la quatrième noter que u est compact si et seulement si $\epsilon_{u,u}$ est continue ce qui est équivalent à dire que $\epsilon_{u,u}$ est représentable. Il suffit donc d'exprimer qu'il existe un élément $e \in \mathcal{D}$ qui code $\epsilon_{u,u}$. Enfin le lemme 1.3.1 nous dit que u est premier si et seulement si u est compact et $u \leq c_1 \vee c_2 \Rightarrow (u \leq c_1 \wedge u \leq c_2)$, avec c_1 et c_2 des éléments compacts quelconques. □

Enfin, rappelons que dans les i -modèles fortement stables les éléments compacts sont les éléments finis et que les éléments premiers sont les singletons. On a donc dans ces modèles des formules de la logique du premier ordre et du langage $\{\bullet\}$ définissant les éléments finis et les singletons de ces modèles.

B.2 Un critère d'isomorphisme applicatif

On se place maintenant dans le cadre des i -modèles fortement stables.

Définition B.2.1 Soient $(H_1 = (D_1, \cdot, i_1), i_1)$, $(H_2 = (D_2, \cdot, i_2), i_2)$ deux paires hypercohérentes totales.

Les paires (H_1, i_1) et (H_2, i_2) sont **iH -isomorphes** si il existe un isomorphisme d'hypercohérence θ de H_1 vers H_2 tel que, pour tout $(d, \delta) \in (D_1)_c \times D_2$ on a $\theta(i_1(d, \delta)) = i_2(\theta^\bullet(d), \theta(\delta))$.

Cette définition est l'analogie, pour les paires hypercohérentes, de la notion d' i -isomorphisme rappelée dans l'introduction de ce chapitre. On rajoute ici une contrainte sur θ en demandant que cette application soit un isomorphisme d'hypercohérence.

Définition B.2.2 Deux i -modèles fortement stables $(\mathcal{D}(H_1), F_1, G_1)$ et $(\mathcal{D}(H_2), F_2, G_2)$ sont **fortement isomorphes** s'il existe un isomorphisme applicatif Θ de $\mathcal{D}(H_1)$ vers $\mathcal{D}(H_2)$ tel que Θ et Θ^{-1} soient fortement stables.

Nous pouvons maintenant énoncer un critère de d'isomorphisme.

Théorème B.2.3 Soient (H_1, i_1) et (H_2, i_2) deux paires hypercohérentes totales. Les i -modèles fortement stables, $(\mathcal{D}(H_1), F_1, G_1)$ et $(\mathcal{D}(H_2), F_2, G_2)$, engendrés par ces deux paires sont fortement isomorphes si et seulement si les deux paires hypercohérentes sont iH -isomorphes.

Preuve :(\Rightarrow) Appelons Θ l'isomorphisme applicatif fortement stable existant entre $\mathcal{D}(H_1)$ et $\mathcal{D}(H_2)$.

D'après le corollaire B.1.2, Θ induit une bijection θ entre les singletons et commute avec tous les sups, filtrants ou non. Soit $\theta(\alpha)$ l'unique α' tel que $\Theta(\{\alpha\}) = \{\alpha'\}$. Il est clair que i est bien définie et est une bijection de D_1 vers D_2 et que i^\bullet commute également avec tous les sups, filtrant ou non, donc $i^\bullet = \Theta$.

Montrons que θ est un isomorphisme d'hypercohérence.

Soit $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{C}(H_1)$. Alors l'ensemble $A = \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\} \in \mathcal{C}(H_1)$ et puisque Θ est fortement stable on a $\theta^{\bullet\bullet} = \{\{\theta(\alpha_1)\}, \dots, \{\theta(\alpha_n)\}\} \in \mathcal{C}(H_2)$ ce qui entraîne que $\theta^\bullet(u) \in \mathcal{C}(H_2)$.

Soit $v = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\} \in \mathcal{C}(H_2)$. L'application θ étant une bijection on a $u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tel que $\theta^\bullet(u) = v$.

L'ensemble $B = \{\{\alpha'_1\}, \dots, \{\alpha'_n\}\} \in \mathcal{C}(H_2)$ et puisque Θ^{-1} est fortement stable on a $\Theta^{-1}{}^\bullet(B) = \{\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_n\}\} \in \mathcal{C}(H_1)$. Ainsi $u \in \mathcal{C}(H_1)$.

Il reste à montrer que i vérifie :

$$i(i_1(d, \delta)) = i_2(i^\bullet(d), i(\delta)) \text{ pour tout } (d, \delta) \in \mathcal{D}(H_1)_c \times D_1.$$

On a $F_2(i^\bullet\{i_1(d, \delta)\})(i^\bullet(d)) = \{\delta' \in D_2; \exists d' \subseteq i^\bullet(d) \ i_2(d', \delta') \in \{i(i_1(d, \delta))\}\}$.

$$\begin{aligned} \text{Et, } F_2(i^\bullet\{i_1(d, \delta)\})(i^\bullet(d)) &= i^\bullet(F_1(\{i_1(d, \delta)\})(d)) \text{ car } i^\bullet \text{ est un isomorphisme applicatif} \\ &= i^\bullet\{\delta\} \text{ par définition de } F_1 \\ &= \{i(\delta)\} \end{aligned}$$

Il vient que $\{i(\delta)\} = \{\delta' \in D_2; \exists d' \subseteq i^\bullet(d) \ i_2(d', \delta') \in \{i(i_1(d, \delta))\}\}$, c'est à dire $i(i_1(d, \delta)) = i_2(d', i(\delta))$, pour un $d' \subseteq i^\bullet(d)$. Or $d' \subsetneq i^\bullet(d)$ n'est pas possible car un tel d' satisfait $d' = i^\bullet(d_0)$ pour un $d_0 \subsetneq d$. Et on obtient la contradiction :

$$\begin{aligned} \{i(\delta)\} &= F_2(\{i_2(d', i(\delta))(d')\}) \\ &= F_2(\{i(i_1(d, \delta))(d')\}) \\ &= F_2(i^\bullet\{i_1(d_0, \delta)\})(i(d_0)) \\ &= i^\bullet(F_1(i_1(d, \delta))(d_0)) \\ &= i^\bullet(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Le lemme 2.8.4 nous affirme que i^\bullet est un isomorphisme fortement stable. Il reste à montrer que i^\bullet est un isomorphisme applicatif.

Soient $u, v \in \mathcal{D}(H_1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } i^\bullet(F_1(u)(v)) &= i^\bullet\{\delta \in D_1; \exists d \subseteq v \ i_1(d, \delta) \in u\} \\ &= \{i(\delta); \exists i^\bullet(d) \subseteq i^\bullet(v) \ i(i_1(d, \delta)) \in i^\bullet(u)\} \\ &= \{i(\delta); \exists i^\bullet(d) \subseteq i^\bullet(v) \ i_2(i^\bullet(d), i(\delta)) \in i^\bullet(u)\} \\ &= F_2(i^\bullet(u))(i^\bullet(v)) \end{aligned}$$

□

Kerth a montré que si on a deux paires totales cohérentes $(D_1, \circlearrowleft_1, i_1)$ et $(D_2, \circlearrowleft_2, i_2)$ **ic-isomorphes**, c'est à dire qu'il existe θ un i -isomorphisme qui est en plus un morphisme d'espace cohérent entre ces deux paires, alors les i -modèles stables \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 engendrés par ces deux paires sont applicativement isomorphes, voir [44]. Dans le cadre des i -modèles stables on a pas besoin de rajouter en hypothèse que l'isomorphisme applicatif et son inverse sont stables car il existe une formule COHERENT(x, y) de la logique du premier ordre et du langage $L = \{\bullet\}$ telle que :

pour tout \mathcal{D} i -modèle stable, $\mathcal{D} \models \text{COHERENT}(u, v)$ ssi $u = \{\alpha\}$, $v = \{\beta\}$ et $\alpha \circlearrowleft \beta$.

Grâce à ce critère Kerth donne une démonstration sémantique de l'existence de 2^{\aleph_0} modèles stables non applicativement isomorphes, et, en affinant le critère d'isomorphisme, il arrive également à montrer qu'il existe 2^{\aleph_0} modèles stables non équationnellement équivalants.

Pour pouvoir remplacer la notion d'isomorphisme fort dans le théorème B.2.3 par la notion d'isomorphisme applicatif il nous faudrait trouver, pour tout entier n , une formule HYPCOHERENT $_n(x_1, \dots, x_n)$ telle que, pour tout $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ i -modèle fortement stable, $\mathcal{D} \models \text{HYPCOHERENT}_n(a_1, \dots, a_n)$ ssi $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{C}$.

On ne sais pas s'il existe une telle formule.

En utilisant le théorème B.2.3 on peut toutefois montrer qu'il existe 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non fortement équivalents.

Il reste à affiner ce résultat en montrant :

1. Il existe 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non applicativement isomorphes.
2. Il existe 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non équationnellement équivalants.

Ces questions sont actuellement ouvertes.

Proposition B.2.4 *Il existe 2^{\aleph_0} modèles fortement stables non fortement équivalents.*

Preuve : Pour tout $X \subseteq \mathbb{N}$ on considère la paire hypercohérente partielle suivante : (H_X, I_X) avec $H_X = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_f^*(\mathbb{N}))$ et I_X de graphe $\{(\{0, \dots, n\}, n); n \in X\}$. Il est facile de vérifier que I_X est bien un morphisme partiel d'hypercohérence.

Montrons que si $X \neq X'$ alors les paires hypercohérentes totales $(\overline{H_X}, \overline{I_X})$ et $(\overline{H_{X'}}, \overline{I_{X'}})$, qui sont respectivement les complétions canoniques (voir section 2.10.3) de (H_X, I_X) et $(H_{X'}, I_{X'})$, ne sont pas iH -isomorphes.

Rappelons que la complétion canonique d'une paire partielle ne rajoute pas de nouveaux cycles (voir la définition 2.10.8 et [44]).

Soit, par exemple, $n_0 \in X \setminus X'$.

Supposons que l'on a θ un iH -isomorphisme de $(\overline{H_X}, \overline{I_X})$ vers $(\overline{H_{X'}}, \overline{I_{X'}})$. Alors :

$$\theta(\overline{I_X}(\{0, \dots, n_0\}, n_0)) = \theta(I_X(\{0, \dots, n_0\}, n_0)) = \theta(n_0) = \overline{I_{X'}}(\{\theta(0), \dots, \theta(n_0)\}, \theta(n_0)).$$

Et d'après la définition de $I_{X'}$ et puisque $n_0 \notin X'$, il est clair que l'on a pas d'éléments du type $((d, n), n)$ dans le graphe de $I_{X'}$ avec $\#d = n_0 + 1$ et $n \in d$. Puisque la complétion ne rajoute pas de cycles on obtient une contradiction.

□

Bibliography

- [1] R.M. AMADIO & K. BRUCE & G. LONGO, *The finitary projection model for second order λ -calculus*, I.E.E.E. Symposium on Logic in computer Science, Boston, 1986.
- [2] R.M. AMADIO & G. LONGO, *Type free compiling of parametric types*, in Formal Description of Programming Concepts III, Eds. M. WIRSING, Elsevier Science Publishers, I.F.I.P., 1987, p. 337-398.
- [3] R.M. AMADIO, *Bifinite domains : stable case*, Rapport de Recherche du LIENS, 1991, 91-3.
- [4] R.M. AMADIO, *A quick construction of a retraction of all retractions for stable bifinites*, Information and computation, vol. 116, 1995, p. 272-274.
- [5] J. BAETEN & B. BOERBOOM, *Ω can anything it should't be*, Proceeding of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Serie A : Mathematical Sciences, Vol. 82, no. 1, 1979, p. 111-120.
- [6] H. BARENDREGT & K. KOYMANS, *Comparing some classes of lambda-calculus models*, to H.R. CURRY : Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism, eds. J.P. SELDIN & J.R. HINDLEY, Academic Press, 1980, p. 288-301.
- [7] H. BARENDREGT & M. COPPO & M. DEZANI, *A filter lambda model and the incompleteness of type assignment*, J.S.L., vol. 48, 1983, p.931-940.
- [8] H. BARENDREGT, *The Lambda Calculus : its Syntax and Semantics*, revised ed., North-Holland, 1984.
- [9] O. BASTONERO & X. GOUY, *Stabilité forte et incomplétude de la classe des modèles stables du λ -calcul pur*, comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 322, no 10, Série I, 1996, p. 905-908.
- [10] O. BASTONERO & X. GOUY, *Strong stability and incompleteness of the class of stable models*, submitted to Annals of Pure and Applied Logic.
- [11] S. BERARDI, *Retractions on DI-domains as a model for Type : Type*, Information and Computation, vol. 94, 1991, p. 204-231.

- [12] C. BERLINE, *Rétractions et interprétation interne du polymorphisme : le problème de la rétraction universelle*, Informatique théorique et Applications (Theoretical informatics and Applications), vol. 26, no. 1, 1992, p. 59-91.
- [13] C. BERLINE, *λ -calcul, systèmes de typages et modélisations*, Prépublication de l'équipe de Logique Mathématique de L'Université Paris VII, no. 38, 1992.
- [14] G. BERRY, *Stable model of typed Lambda-Calculi*, Proc. 5th Int. Coll. on Automata, Languages and Programming, LNCS, vol. 62, 1978, p.72-89.
- [15] G. BERRY, *Modèles complètement adéquats et stables des lambda-calculs typés*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII, 1979.
- [16] G. BERRY & P.L. CURIEN, *Sequential algorithms on concret data structures*, Th. Comp. Sc., Vol. 20, 1982, P. 265-321.
- [17] G. BERRY & P.L. CURIEN & J.J. LEVY, *Full abstraction for sequential languages : the state of the art*, Proc. French-US Seminar on the Applications of Algebra to Language Definition and compilation, Fontainebleau, 1982, Cambridge University Press, 1985.
- [18] A. BUCCIARELLI, *Sequential models of PCF : some contributions to the domain-theoretic approach to full abstraction*, Ph.D. Thesis, Università di Pisa, 1993.
- [19] A. BUCCIARELLI & T. EHRHARD, *Sequentiality and Strong Stability*, Proc. Logic in Computer Science, 1991, Amsterdam, p. 138-145.
- [20] A. BUCCIARELLI & T. EHRHARD, *A theory of sequentiality*, Th. Comp. Sc., vol. 113, 1993, p. 273-291.
- [21] A. BUCCIARELLI & T. EHRHARD, *Sequential in an Extensional Framework*, Information and Computation, vol. 110, 1994, p. 265-296.
- [22] A. CHURCH, *A Set of Postulates for the Foundations of Logics*, Annals of Mathematical Studies, vol. 33, 1932, p. 343-366, et vol. 34, 1933, p. 839-864.
- [23] A. CHURCH, *The calculi of lambda conversion*, Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1949.
- [24] M. COPPO & M. DEZANI & F. HONSELL & G. LONGO, *Extended type structure and filter lambda models*, in Logic Coloq., ED. G. LOLLI & AL., N.H., 1982, p. 241-262.
- [25] P.L. CURIEN, *Categorical combinators, Sequential Algorithm and functional Programming*, Research notes on Theoretical Computer Science, Pitman, Revised Edition, 1993.
- [26] T. EHRHARD, *Hypercoherences : a strongly stable model of linear logic*, Advances in linear logic, Eds. J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & L. REGNIER, London Mathematical Society, Lecture Note Series 222, Cambridge University Press, 1995, p. 83-108.

- [27] T. EHRHARD, *Projecting sequential algorithms on strongly stable functions*, Annals of Pure and Applied Logic, Vol 77, no. 3, 1996, P. 201-244.
- [28] G. ENGELER, *Algebra and combinators*, Algebra Universalis, vol. 13(3), 1981, p. 389-392.
- [29] G. GIERZ ET AL., *A compendium of continuous lattices*, Springer verlag, Berlin 1980.
- [30] J.Y. GIRARD, *The system F of variable types, fifteen years later*, Th. Comp. Sc., vol. 45, 1986, p. 159-192.
- [31] X. GOUY & Y. JIANG, *Universal retractions on DI-domains*, Information and Computation, 119, no 2, 1995, p. 252-257.
- [32] X. GOUY, *Etude des théories équationnelles et des propriétés algébriques des modèles stables du λ -calcul*, Thèse, Université Paris VII, 1995.
- [33] X. GOUY, *Une extension du théorème de Hyland et Wadsworth à une classe abstraite de modèles du λ -calcul pur*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 322, Série I, 1996, p. 419-422.
- [34] J.R. HINDLEY & G. LONGO, *Lambda Calculus Models and extensionality*, Zeitschrift für Logik und Grundlagen der Mathematik, vol 26, 1980, p. 229-310.
- [35] J.R. HINDLEY & J.P. SELDIN, *Introduction to Combinators and λ -Calculus*, Cambridge University Press, 1986.
- [36] F. HONSELL & S. RONCHI DELLA ROCCA, *Reasoning about interpretation in qualitative λ -models*, Programming Concepts and Methods, Eds. M. BROU & C. JONES, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, 1990, p. 505-521.
- [37] F. HONSELL & S. RONCHI DELLA ROCCA, *An approximation Theorem for Topological Lambda Models and the Topological Incompleteness of Lambda Calculus*, Journal of Computer and System Sciences, vol. 45, 1992, p. 49-75.
- [38] Y. JIANG, *La sémantique continue du Lambda calcul est incompatible avec l'existence d'une rétraction universelle*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 314, Série I, 1992, p. 779-782.
- [39] Y. JIANG, *Consistance et inconsistance de théories de lambda-calcul étendus*, Thèse, Université Paris VII, 1993.
- [40] Y. JIANG, *Consistency of λ -theory with n -tuples and easy terms*, Archive for Mathematical Logic, vol. 34, no 2, 1995, p. 79-96.
- [41] G. KAHN & G. PLOTKIN, *Domaines concrets*, Rapport IRIA-LABORIA 336, 1978.
- [42] R. KERTH, *2^{\aleph_0} modèles de graphes non équationnellement équivalents*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 318, Série I, 1994, p. 587-590.

- [43] R. KERTH, *Définissabilité dans les domaines réflexifs*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 318, Série I, 1994, p. 685-688.
- [44] R. KERTH, *Isomorphisme et équivalence équationnelle entre modèles du λ -calcul*, Thèse, Université Paris VII, 1995.
- [45] S.C. KLEENE & J.B. ROSSER, *The inconsistency of certain formal logics*, Annals of Mathematical Studies, vol. 36, no. 2, 1935, p. 630-636.
- [46] J.L. KRIVINE, *Lambda-calcul, type et modèles*, Masson, 1990.
- [47] J.L. KRIVINE, *Lambda-calculus, types and models*, Ellis & Horwood 1993.
- [48] K. KOYMANS, *Models of the lambda calculus*, information and control, vol. 52, 1982, p. 306-332.
- [49] L. LAMBEK, *From λ -Calculus to C.C.C.*, to H.R. CURRY : Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism, eds. J.P. SELDIN & J.R. HINDLEY, Academic Press, 1980, p. 375-402.
- [50] J.J. LEVY, *An algebraic interpretation of the $\lambda\beta K$ -calculus*, Th. Comp. Sc., vol. 2, no. 1, 1976, p. 97-114.
- [51] A.R. MEYER, *What is a Model of the Lambda Calculus?*, Information and Control, vol 52, 1982, p. 87-122.
- [52] R. MILNER, *Fully Abstract Models of Typed Lambda-Calculi*, Th. Comp. Sc., vol. 4, no. 1, 1977, p. 1-23.
- [53] P. ODIFREDDI, *Classical Recursion Theory*, Studies in Mathematical Logic, N.H., 1989.
- [54] L.C. PAULSON, *Logic and Computation, interactive proof with cambridge LCF*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Sciences 2, Cambridge University Press, 1987.
- [55] D. PARK, *The Y-Combinator in Scott's Lambda Calculus Models*, Theory of Computation Report, 13, Dept. of Computer Science, University of Warwick, 1976.
- [56] G. PLOTKIN, *LCF considered as a programming language*, Th. Comp. Sc., vol. 5, 1977, p. 223-256.
- [57] G. PLOTKIN, *Set-theoretical and other elementary models of the λ -calculus*, Th. Comp. Sc., vol. 121, no. 1-2, 1993, p. 351-410.
- [58] G. REVESZ, *Lambda-Calculus, Combinators, and Functional Programming*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Sciences 4, Cambridge University Press, 1988.
- [59] L.F. SANCHIS, *Reflexive Domains*, to H.R. CURRY : Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism, eds. J.P. SELDIN & J.R. HINDLEY, Academic Press, 1980, p. 339-361.

- [60] H. SCHELLINX, *Isomorphisms and nonisomorphisms of graph models*, Journal of symbolic logic, vol. 56/1, 1991, p. 227-249.
- [61] D.S. SCOTT, *Models for the λ -calculus*, manuscrit, non publié, 1969, 53 p.
- [62] D.S. SCOTT, *Continuous lattices*, in *Topose, algebraic geometry and logic*, Eds. F.W. LAWRENCE, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 97-136.
- [63] D.S. SCOTT, *Models for various type free calculi*, Logic Methodology and Philosophy of Science IV, Eds. SUPPES & AL., N.H., 1973, p. 157-187.
- [64] D.S. SCOTT, *Data types as lattices*, S.I.A.M. J. Comput., vol. 5, 1975, p. 522-587.
- [65] D.S. SCOTT, *Relating theories of the λ -calculus*, to H.R. CURRY : Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism, eds. J.P. SELDIN & J.R. HINDLEY, Academic Press, 1980, p. 403-450.
- [66] D.S. SCOTT, *A type-theoretical alternative to ISWIM, CUCH, OWHY*, Theo. Comp. Sc., vol. 121, 1993, p.411-440.
- [67] J.G. STOY, *Denotational Semantics : The Scott-Strachey Approach to Programming Languages Theory*, M.I.T. Press, 1977.
- [68] J. VUILLEMIN, *Syntaxe, sémantique et axiomatique d'un langage de programmation simple*, Thèse de Doctorat d'état, Université Paris VII, 1974.
- [69] C.P. WADSWORTH, *The relation between computational and denotational properties for Scott's D_∞ -models of the lambda calculus*, SIAM, J. Comput., vol. 5, 1976, p. 488-521.
- [70] C.P. WADSWORTH, *Approximate Reductions and λ -calculus Models*, SIAM J. Comput., vol. 7, 3, 1978, p. 337-356.
- [71] P.H. WELCH, *Continuous semantics and inside-out reductions*, LNCS, vol. 37, 1975, p. 122-146.
- [72] C. ZYLBERAJCH, *Syntaxe et sémantique de la facilité en λ -calcul*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1991.