

MPRI 2-2 : Domaines. Examen du 8/2/2010

Tous documents autorisés. Composer les deux parties de l'examen sur des copies séparées.

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE. On rappelle que, dans le lambda-calcul, $(M)N_1 \cdots N_n$ est une notation pour $((\cdots(M)N_1 \cdots)N_{n-1})N_n$; en particulier, pour $n = 0$, le terme ainsi noté est M . De même, $\lambda x_1 \cdots x_n M$ représente $\lambda x_1 (\lambda x_2 \cdots (\lambda x_n M) \cdots)$. Etant donné un lambda-terme M et une liste de variables $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$, on dit que \vec{x} est adaptée à M si \vec{x} est sans répétitions et contient toutes les variables libres de M . Si M est un lambda-terme, on appelle forme normale de tête de M la forme normale de M pour la réduction de tête β_h vue en cours, si elle existe, auquel cas on dit que M est normalisable de tête.

A) Donner l'interprétation dans le modèle de Engeler des lambda-termes clos suivants : $\lambda x x$, $\lambda x \lambda y y$, $\lambda x \lambda y \lambda z (x)(y)z$, $\lambda x \lambda z (x)(x)z$, $\lambda x (x)xx$. En faisant le moins de calculs possible, montrer que l'interprétation de $(\lambda f (\lambda x (f)(x)x) \lambda x (f)(x)x) \lambda z z$ est vide.

B) On dira que 2 lambda-termes M et N sont observationnellement équivalents, et on écrira $M \sim N$, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tous lambda-termes P_1, \dots, P_n , le terme $(M)P_1 \cdots P_n$ est normalisable de tête si et seulement si le terme $(N)P_1 \cdots P_n$ est normalisable de tête.

1) Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur les lambda-termes.

2) Soient M et N deux lambda-termes et soit \vec{x} une liste de variables adaptée à M et à N . Montrer que si $[M]^{\vec{x}} = [N]^{\vec{x}}$, alors $M \sim N$ (la sémantique étant calculée dans le modèle de Engeler vu en cours).

C) On appellera *préordre avec cohérence* (POC pour faire court) une structure $X = (|X|, \leq_X, \circ_X)$ où

- $|X|$ est un ensemble
- \leq_X est une relation de préordre sur $|X|$
- et \circ_X est une relation binaire, symétrique et réflexive sur $|X|$, appelée *cohérence*.

Ces relations doivent de plus vérifier la propriété suivante : $\forall a, b, b' \in |X| (b' \leq_X b \text{ et } b \circ_X a) \Rightarrow b' \circ_X a$. On appellera **(CP)** (cohérence-préordre) cette condition dans la suite.

Si X est un POC, on note $\mathcal{I}(X)$ l'ensemble des parties de $|X|$ qui sont closes vers le bas pour \leq_X (ie. $\mathcal{I}(X) = \{x \subseteq |X| \mid \forall a, b \in |X| (a \leq b \text{ et } b \in x) \Rightarrow a \in x\}$) et on note $\mathcal{I}_C(X)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}(X)$ qui sont des cliques pour la relation \circ_X (ie. $\mathcal{I}_C(X) = \{x \in \mathcal{I}(X) \mid \forall a, b \in x a \circ_X b\}$).

1) Montrer que si u est une clique de $(|X|, \circ_X)$, alors $\downarrow u \in \mathcal{I}_C(X)$. (On rappelle qu'une clique de $(|X|, \circ_X)$ est une partie u de $|X|$ telle que $\forall a, b \in u a \circ_X b$, et que $\downarrow u = \{a \in |X| \mid \exists b \in u a \leq_X b\}$).

2) Montrer que $\mathcal{I}_C(X)$, muni de l'inclusion, est un ordre partiel complet et que, dans $\mathcal{I}_C(X)$, toute partie bornée a un sup (qui est l'union de ses éléments).

3) Montrer qu'un élément x de $\mathcal{I}_C(X)$ est isolé si et seulement s'il existe une clique finie u_0 de $(|X|, \circ_X)$ telle que $x = \downarrow u_0$. En déduire que tout élément de $\mathcal{I}_C(X)$ est le sup de ses minorants isolés (autrement dit $\mathcal{I}_C(X)$ est algébrique).

4) On vient de montrer que $\mathcal{I}_C(X)$ est toujours un domaine de Scott (qui est en fait premier-algébrique). Donner un exemple de POC X tel que $\mathcal{I}_C(X)$ ne soit pas un treillis complet.

5) Soient X et Y deux POC. Définir un POC $X \& Y$ tel que $\mathcal{I}_C(X \& Y)$ soit isomorphe à $\mathcal{I}_C(X) \times \mathcal{I}_C(Y)$ (avec l'ordre produit), en tant qu'ensembles partiellement ordonnés. Justifier. [S'inspirer de ce qui a été vu pour les espaces cohérents et les préordres.]

6) Soient X et Y deux POC. On définit $X \Rightarrow Y$ comme le triplet $(|X \Rightarrow Y|, \leq_{X \Rightarrow Y}, \circ_{X \Rightarrow Y})$ où :

- $|X \Rightarrow Y|$ est l'ensemble des couples (u_0, b) où u_0 est une clique finie de $(|X|, \circ_X)$ et $b \in |Y|$;
- $\leq_{X \Rightarrow Y}$ est la relation de préordre sur $|X \Rightarrow Y|$ donnée par $(u_0, b) \leq_{X \Rightarrow Y} (u'_0, b')$ si et seulement si $\forall a' \in u'_0 \exists a \in u_0 a' \leq_X a$, et $b \leq_Y b'$ (on ne demande pas de vérifier que c'est un préordre);
- $\circ_{X \Rightarrow Y}$ est la relation réflexive et symétrique sur $|X \Rightarrow Y|$ donné par $(u_0, b) \circ_{X \Rightarrow Y} (u'_0, b')$ si et seulement si $(\forall a \in u_0 \forall a' \in u'_0 a \circ_X a') \Rightarrow b \circ_Y b'$ (on ne demande pas de vérifier que cette relation est réflexive et symétrique).

Montrer que $X \Rightarrow Y$ ainsi défini est bien un POC (il s'agit donc seulement de vérifier que la condition **(CP)** est vérifiée par $X \Rightarrow Y$).

7) Soit $f : \mathcal{I}_C(X) \rightarrow \mathcal{I}_C(Y)$ une fonction continue (au sens de Scott). On définit $\text{Tr}(f) = \{(u_0, b) \in |X \Rightarrow Y| \mid b \in f(\downarrow u_0)\}$. Montrer que $\text{Tr}(f) \in \mathcal{I}_C(X \Rightarrow Y)$.

8) Soit $t \in \mathcal{I}_C(X \Rightarrow Y)$. Soit $\text{Fun}(t) : \mathcal{I}_C(X) \rightarrow \mathcal{P}(|Y|)$ défini par $\text{Fun}(t)(x) = \{b \mid \exists u_0 (u_0, b) \in t \text{ et } u_0 \subseteq x\}$. Montrer que $\forall x \in \mathcal{I}_C(X) \text{ Fun}(t)(x) \in \mathcal{I}_C(Y)$ et que la fonction $\text{Fun}(t)$ est continue.

9) Montrer que les deux fonctions Tr et Fun définissent un isomorphisme d'ordre entre l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{I}_C(X)$ vers $\mathcal{I}_C(Y)$ (muni de l'ordre ponctuel : $f \leq g$ si $\forall x \in \mathcal{I}_C(X) f(x) \subseteq g(x)$) d'une part, et $\mathcal{I}_C(X \Rightarrow Y)$ de l'autre.

10) On définit $X \multimap Y = (|X \multimap Y|, \leq_{X \multimap Y}, \circ_{X \multimap Y})$ de la façon suivante :

- $|X \multimap Y| = |X| \times |Y|$;

- $\leq_{X \multimap Y}$ est la relation de préordre sur $|X \multimap Y|$ donnée par $(a, b) \leq_{X \multimap Y} (a', b')$ si et seulement si $a' \leq_X a$ et $b \leq_Y b'$.

- $\circ_{X \multimap Y}$ est la relation réflexive et symétrique sur $|X \multimap Y|$ donné par $(a, b) \circ_{X \multimap Y} (a', b')$ si et seulement si $a \circ_X a' \Rightarrow b \circ_Y b'$.

Montrer que $X \multimap Y$ ainsi défini est bien un POC (il s'agit donc seulement de vérifier que la condition **(CP)** est vérifiée par $X \multimap Y$).

11) On dira qu'une fonction $f : \mathcal{I}_C(X) \rightarrow \mathcal{I}_C(Y)$ est linéaire si, pour toute partie bornée B de $\mathcal{I}_C(X)$, on a $f(\cup B) = \cup_{x \in B} f(x)$ (en particulier, f est continue). Montrer que la trace linéaire de f , définie par $\text{Tr}_{\text{lin}}(f) = \{(a, b) \in |X \multimap Y| \in f(\downarrow \{a\})\}$, appartient à $\mathcal{I}_C(X \multimap Y)$ et esquisser la preuve qu'on définit ainsi un isomorphisme d'ordre partiel entre l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathcal{I}_C(X)$ vers $\mathcal{I}_C(Y)$, muni de l'ordre ponctuel sur les fonctions, et $\mathcal{I}_C(X \multimap Y)$.

12) Proposer une définition pour un POC $X \otimes Y$ tel que, pour tout POC Z , les ordres partiels $\mathcal{I}_C((X \otimes Y) \multimap Z)$ et $\mathcal{I}_C(X \multimap (Y \multimap Z))$ soient isomorphes. Justifier.

13) Soit \perp le POC tel que $|\perp| = \{*\}$ (singleton arbitraire). Soit X un POC. Décrire le POC $X \multimap \perp$. En déduire que $\mathcal{I}_C(X)$ et $\mathcal{I}_C((X \multimap \perp) \multimap \perp)$ ne sont pas isomorphes en général. Comparer avec ce qui se passe dans les deux modèles vus en cours (espaces cohérents et préordres).