

Résolutions non abéliennes et homologie des monoïdes

Yves Lafont

Institut de Mathématiques de Luminy

Rencontre GeoCal, Montpellier, 17-18 mars 2005

Il s'agit de comparer l'homologie définie par Métayer avec l'homologie classique dans le cas d'un monoïde.

Domaines apparentés : homologie de la réécriture ; homologie des groupes gaussiens ; homologie des n -catégories ; réécriture en dimension supérieure ; homotopie dirigée.

1 Complexes non abéliens.

Un *complexe* (non abélien) est une ∞ -catégorie $X : X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \cdots$

Ici, la double flèche $X_{n-1} \leftarrow X_n$ représente la *source* $\partial_n^- : X_n \rightarrow X_{n-1}$ et le *but* $\partial_n^+ : X_n \rightarrow X_{n-1}$.

Cette notion généralise un certain nombre de structures algébriques bien connues, par exemple :

le singleton 1 :	1	\leftarrow	1	\leftarrow	1	\leftarrow	1	\leftarrow	\cdots
un ensemble S :	S	\leftarrow	S	\leftarrow	S	\leftarrow	S	\leftarrow	\cdots
un monoïde M :	1	\leftarrow	M	\leftarrow	M	\leftarrow	M	\leftarrow	\cdots
une catégorie C :	C_0	\leftarrow	C_1	\leftarrow	C_1	\leftarrow	C_1	\leftarrow	\cdots
un monoïde abélien M :	1	\leftarrow	1	\leftarrow	M	\leftarrow	M	\leftarrow	\cdots
une catégorie monoïdale C :	1	\leftarrow	C_0	\leftarrow	C_1	\leftarrow	C_1	\leftarrow	\cdots
une 2-catégorie C :	C_0	\leftarrow	C_1	\leftarrow	C_2	\leftarrow	C_2	\leftarrow	\cdots

Remarque : dans tous ces exemples, $X_n = X_{n-1}$ et $\partial_n^- = \partial_n^+ = \text{id}_{X_n}$ à partir d'un certain rang.

2 Résolutions non abéliennes.

Un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ est une *fibration triviale* si chaque φ_n satisfait la *propriété de relèvement des cellules*.

Définition équivalente : chaque φ_n est surjectif et chaque φ_n (pour $n \geq 1$) satisfait la *propriété d'étirement*.

Un complexe X est dit *trivial* si l'unique morphisme $\varphi : X \rightarrow 1$ est une fibration triviale.

Un *complexe libre* est un polygraphe $\Sigma^* : \Sigma_0 = \Sigma_0^* \leftarrow \Sigma_1^* \leftarrow \Sigma_2^* \leftarrow \Sigma_3^* \cdots$

Exemples de complexes libres (de dimension finie) :

1. l'ensemble S : il suffit de poser $\Sigma_0 = S$ et $\Sigma_n = \emptyset$ pour $n \geq 1$;
2. le *monoïde libre* S^* : il suffit de poser $\Sigma_0 = 1$, $\Sigma_1 = S$, et $\Sigma_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$;
3. le *système de réécriture* S^*, \rightarrow_R^* : il suffit de poser $\Sigma_0 = 1$, $\Sigma_1 = S$, $\Sigma_2 = R$, et $\Sigma_n = \emptyset$ pour $n \geq 3$.

Proposition (Métayer) : le complexe libre Σ^* est *cofibrant*. Autrement dit, si $\varphi : X \rightarrow Y$ est une fibration triviale et $\psi : \Sigma^* \rightarrow Y$ est un morphisme quelconque, alors il existe une factorisation $\psi = \varphi \circ \sigma$ avec $\sigma : \Sigma^* \rightarrow X$.

Question : est-ce que tout complexe cofibrant est libre ?

Une *résolution* (non abélienne) du complexe X est une fibration triviale $\varphi : \Sigma^* \rightarrow X$.

On a la notion évidente de *morphisme de résolution*.

Théorème (Métayer) :

1. un complexe admet toujours une résolution ;
2. entre deux résolutions d'un même complexe, il existe toujours un morphisme ;
3. deux morphismes entre deux résolutions d'un même complexe sont toujours *homotopes*.

Remarque : c'est la troisième propriété qui est cruciale. Pour cela, il faut définir la notion d'*homotopie*.

Corollaire : deux résolutions d'un même complexe sont toujours *homotopiquement équivalentes*.

3 Linéarisation et homologie

Étant donné un complexe libre (non abélien) Σ^* , on définit un complexe abélien de \mathbb{Z} -modules libres :

$$\mathbb{Z}\Sigma: \mathbb{Z}\Sigma_0 \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\Sigma_1 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\Sigma_2 \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\Sigma_3 \dots$$

On définit d'abord ∂_n^- et ∂_n^+ en remplaçant les composés par des sommes, puis on pose $\partial_n = \partial_n^+ - \partial_n^-$.

Remarque : on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. De plus, le *linéarisé* $\mathbb{Z}\Sigma$ est un quotient de Σ^* (*abelianisé*).

L'*homologie* (en dimension n) de ce complexe abélien est le groupe $H_n(\mathbb{Z}\Sigma) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$ (avec $\partial_0 = 0$).

Remarque : $H_n(\mathbb{Z}\Sigma) = 0$ si et seulement si $\ker \partial_n = \text{im } \partial_{n+1}$.

Si $\varphi: \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ est un morphisme de complexes, on définit son *abelianisé* $\varphi^{\text{ab}}: \mathbb{Z}\Sigma \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma'$.

Proposition (Métayer) : si deux morphismes $\varphi, \psi: \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ sont homotopes, alors φ^{ab} et ψ^{ab} sont homotopes.

Corollaire 1 : si $\varphi: \Sigma^* \rightarrow X$ et $\varphi': \Sigma'^* \rightarrow X$ sont des résolutions non abéliennes, alors $H_n(\mathbb{Z}\Sigma) \simeq H_n(\mathbb{Z}\Sigma')$.

Ainsi, l'homologie ne dépend pas du choix de la résolution : c'est l'*homologie du complexe non abélien* X .

Corollaire 2 : si le complexe libre Σ^* est trivial alors le *complexe augmenté* suivant est exact :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}\Sigma_0 \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\Sigma_1 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\Sigma_2 \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\Sigma_3 \dots$$

L'*augmentation* ε est le morphisme de groupe abélien défini par $\varepsilon(a) = 1$ pour tout $a \in \Sigma_0$.

4 Cas des groupes

Si G est un groupe et S un ensemble, on note GS l'*action libre* de G sur S : c'est le produit cartésien $G \times S$ dont les éléments (g, s) sont notés gs . De plus, si $g \in G$ et $hs \in GS$, on pose $g(hs) = (gh)s \in GS$.

On va démontrer le résultat suivant :

Théorème : si G est un groupe, alors son homologie coïncide avec celle du complexe non abélien G .

Soit $\varphi: X \rightarrow G$ un morphisme de complexes. Pour simplifier, on suppose que $X_0 = 1$ de sorte que $GX_0 \simeq G$.

On construit alors un nouveau complexe $GX: G \leftarrow GX_1 \leftarrow GX_2 \leftarrow GX_3 \dots$

La source ∂_n^- et le but ∂_n^+ sont définis par les formules suivantes :

$$\partial_1^-(gx) = g \text{ et } \partial_1^+(gx) = g\varphi_1(x), \quad \partial_n^-(gx) = g\partial_n^-(x) \text{ et } \partial_n^+(gx) = g\partial_n^+(x) \text{ pour } n \geq 2.$$

Remarque : toutes ces applications sont compatibles avec l'action de G . De plus, on a un morphisme $\pi: GX \rightarrow X$ défini par $\pi_n(gx) = x$ pour tout $x \in X_n$.

Lemme 1 : si φ est une fibration triviale, alors le complexe GX est trivial.

Remarque : l'existence des inverses est cruciale pour ce résultat.

Lemme 2 : si X est un complexe libre Σ^* (avec $\Sigma_0 = 1$), alors GX est un complexe libre Γ^* avec $\Gamma_0 = G$ et $\Gamma_n = G\Sigma_n$ pour tout $n \geq 1$. Autrement dit, les générateurs de ce complexe libre sont les ga avec $g \in G$ et $a \in \Sigma_n$.

De plus, le linéarisé $\mathbb{Z}\Gamma$ est un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules libres.

On considère \mathbb{Z} comme un $\mathbb{Z}G$ -module en posant $gm = m$ pour tout $g \in G$ et $m \in \mathbb{Z}$. L'*augmentation* $\varepsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$ est alors $\mathbb{Z}G$ -linéaire.

Lemme 3 : si $\varphi: \Sigma^* \rightarrow G$ est une résolution non abélienne, alors le complexe suivant est une résolution du $\mathbb{Z}G$ -module \mathbb{Z} par des $\mathbb{Z}G$ -modules libres :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}G \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G\Sigma_1 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G\Sigma_2 \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z}G\Sigma_3 \dots$$

Le morphisme $\pi^{\text{ab}}: \mathbb{Z}\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma$ est défini par $\pi_0^{\text{ab}} = \varepsilon$ et $\pi_n^{\text{ab}}(ga) = a$ pour tout $a \in \Sigma_n$ avec $n \geq 1$. On en déduit que le complexe de \mathbb{Z} -modules $\mathbb{Z}\Sigma$ s'obtient en trivialisant l'action de G dans le complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules $\mathbb{Z}\Gamma$. Par définition, l'homologie du groupe G est donc celle du complexe $\mathbb{Z}\Sigma$, d'où le théorème.

5 Cas des monoïdes

Conjecture : si M est un monoïde, alors son homologie coïncide avec celle du complexe non abélien M .

En général, le complexe MX n'est pas trivial. Il vérifie une propriété plus faible (*existence d'un objet initial*).