

Déformation des Flots de Chemins Continus : Théorie et Applications

Projet de recherche

Philippe Gaucher
Institut de Recherche Mathématique Avancée
ULP et CNRS
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France
gaucher@math.u-strasbg.fr

1 Combinatoire des ω -catégories

Les articles [Gau01a, Gau02, Gau01c] dévoilent des phénomènes combinatoires complexes liés aux ω -catégories strictes qui sont encore mal compris. Notamment un certain nombre de conjectures comme celle des éléments minces semblent pour le moment hors de portée. Des phénomènes comme l'apparition du groupe des tresses jusque dans le nerf simplicial d'une ω -catégorie sont encore sous-exploités. La compréhension de ces phénomènes et en particulier de la structure algébrique profonde derrière les mouvements élémentaires définis dans [Gau01a] sur le nerf cubique d'une ω -catégorie stricte pourrait peut-être permettre de mieux comprendre les ω -catégories cubiques. Voire peut-être permettre de définir une notion de *ω -catégorie cubique faible*. Une telle notion n'existe en effet pas encore si l'on en croit l'exposé synthétique de Leinster sur les différentes définitions de ω -catégories faibles [Lei].

2 Structure algébrique de la dihomotopie

De la même façon que derrière les CW-complexes on trouve la structure de catégorie à modèle [Hov99], on peut se demander quelle genre de structure algébrique se cache derrière

les CW-complexes globulaires. Appelons-là provisoirement *catégorie à modèle dirigée*. Savoir ce qu'est exactement une catégorie à modèle dirigée permettrait d'obtenir une machinerie permettant de produire dans le cas dirigé et avec les nouveaux foncteurs introduits pour la dihomotopie des théorèmes analogues à ceux qu'on trouve en topologie algébrique classique, notamment des longues suites exactes, etc...

3 Construire des invariants algébriques

Tous les foncteurs construits jusqu'ici (et qui ne sont pas tous des invariants pour la dihomotopie) s'appuient sur la structure algébrique des simplexes en position achronale dans le HDA. Peut-on en construire d'autres? Il manque notamment dans ma panoplie de foncteurs un foncteur que j'appelle l'*homotopie biglobulaire* [Gau01b] et qui devrait jouer le rôle de l'homotopie dans cette théorie pour la raison suivante. Je conjecture que le morphisme d'Hurewicz dans cette théorie sera un morphisme allant d'un invariant dihomotopique contenant moralement tous les groupes d'homotopie de toutes les coupes achronales vers un invariant dihomotopique contenant moralement tous les groupes d'homologie singulière de toutes les coupes achronales, ce morphisme contenant lui-même moralement tous les morphismes d'Hurewicz de toutes les coupes achronales. je conjecture que le but de ce morphisme est l'homologie totale du nerf biglobulaire introduit dans [Gau02]. Je cherche donc la source de ce morphisme.

4 Liens avec l'informatique

Il y a de nombreux liens avec l'informatique. Dans le cas des diagrammes PV, tous les groupes d'homologie introduits n'ont aucune torsion. Donc une restriction aux *types de dihomotopie rationnels* est suffisante pour cette classe d'exemples. Pour d'autres types d'automates et de modèles informatiques, les liens précis entre type d'homotopie et propriétés informatiques restent à découvrir. Mais une chose est sûre : quelles que soient ces propriétés, elles sont toujours invariantes sur une classe de dihomotopie donnée.

On s'attend à des liens avec les systèmes de réécriture (cf. [GG01] tout à la fin), avec des travaux modélisant les protocoles informatiques par des modèles simpliciaux ([Her94, HR95a, HS93, HS94, HR95b, HR95b, HR99, HR97]), et enfin avec la formalisation du déterminisme permettant de modéliser la confidentialité informatique (c'était en fait ma motivation de départ!).

Références

[Gau01a] P. Gaucher. Combinatorics of branchings in higher dimensional automata. *Theory and Applications of Categories*, 8(12) :pp.324–376, 2001.

- [Gau01b] P. Gaucher. Investigating The Algebraic Structure of Dihomotopy Types. to appear in *Electronic Notes in Computer Science*, 2001. arxiv :math.AT/0105049.
- [Gau01c] P. Gaucher. The branching nerve of HDA and the Kan condition, 2001. arxiv :math.AT/0103011.
- [Gau02] P. Gaucher. About the globular homology of higher dimensional automata. *to appear in Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique*, 2002.
- [GG01] P. Gaucher and E. Goubault. Topological Deformation of Higher Dimensional Automata, 2001. arXiv :math.AT/0107060.
- [Her94] M. Herlihy. A Tutorial on Algebraic Topology and Distributed Computation. Technical report, presented at UCLA, 1994.
- [Hov99] . Hovey. *Model categories*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [HR95a] M. Herlihy and S. Rajsbaum. Algebraic spans (preliminary version). In *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 90–99, Ottawa, Ontario, Canada, 2–23 August 1995.
- [HR95b] M. Herlihy and S. Rajsbaum. A primer on algebraic topology and distributed computing. In J. van Leeuwen, editor, *Computer Science Today*, volume LNCS 1000, pages 203–217. Springer-Verlag, 1995.
- [HR97] M. Herlihy and S. Rajsbaum. On the decidability of distributed decision tasks. In *29th ACM Symposium on the Theory of Computation*, pages 589–598. ACM Press, May 1997.
- [HR99] M. Herlihy and S. Rajsbaum. New perspectives in distributed computing. In M. Kutylowski, L. Pacholski, and T. Wierzbicki, editors, *24th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, volume LNCS 1672, pages 170–186. Springer-Verlag, 1999.
- [HS93] M. Herlihy and N. Shavit. The asynchronous computability theorem for t -resilient tasks. In *Proc. of the 25th STOC*. ACM Press, 1993.
- [HS94] M. Herlihy and N. Shavit. A simple constructive computability theorem for wait-free computation. In *Proceedings of STOC'94*. ACM Press, 1994.
- [Lei] T. Leinster. A Survey of Definitions of n-Category.