Proof-nets and their semantics expressed by local means

(in english-puis-français)

Stéphane Gimenez

PPS - Université Paris Diderot

CHOCO – 7 Octobre 2010

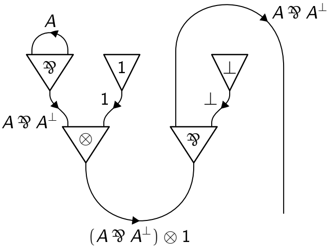
Plan

Introduction / Interaction nets

Born from multiplicative linear logic [Laf90]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^{\perp}}\,ax}{\vdash A \parr A^{\perp}}\,par \qquad \dfrac{}{\vdash 1}\,one}{\vdash (A \parr A^{\perp}) \otimes 1}\,ten \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash (A^{\perp} \otimes A), A \parr A^{\perp}}\,ax}{\vdash (A^{\perp} \otimes A), \perp, A \parr A^{\perp}}\,bot}{\vdash (A^{\perp} \otimes A) \parr \perp, A \parr A^{\perp}}\,par}{\vdash A \parr A^{\perp}}\,cut$$

$$\longmapsto$$

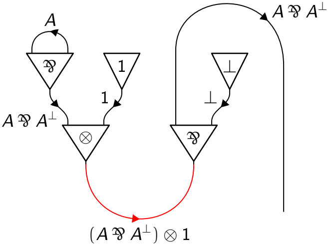


Introduction / Interaction nets

Born from multiplicative linear logic [Laf90]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp}\,\mathit{ax}}{\vdash A \parr A^\perp}\,\mathit{par} \quad \dfrac{}{\vdash 1}\,\mathit{one}}{\vdash (A \parr A^\perp) \otimes 1}\,\mathit{ten} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash (A^\perp \otimes A), A \parr A^\perp}\,\mathit{ax}}{\vdash (A^\perp \otimes A), \bot, A \parr A^\perp}\,\mathit{bot}}{\vdash (A^\perp \otimes A) \parr \bot, A \parr A^\perp}\,\mathit{par}}{\vdash A \parr A^\perp}\,\mathit{cut}$$

$$\longmapsto$$



Introduction / Interaction nets

Why interaction nets are interesting:

- a strong confluence (diamond property)
- local interaction (size of redexes is bounded)
- reduction can be done in parallel

Introduction / Interaction nets

Why interaction nets are interesting:

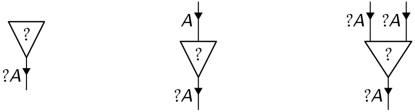
- a strong confluence (diamond property)
- local interaction (size of redexes is bounded)
- reduction can be done in parallel

We'd like to encode λ-calculus, PCF, ... into such a system. We need a way to encode:

- Multiplicatives
- Exponentials
- Additives
- Recursion

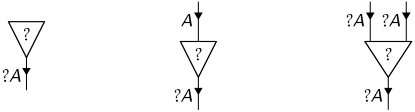
Introduction / Boxes

Exponentials:

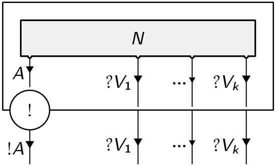


Introduction / Boxes

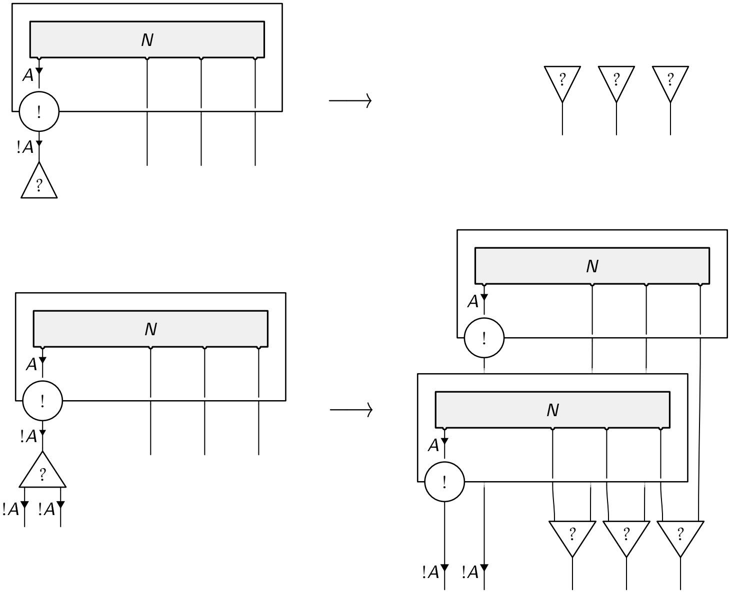
Exponentials:



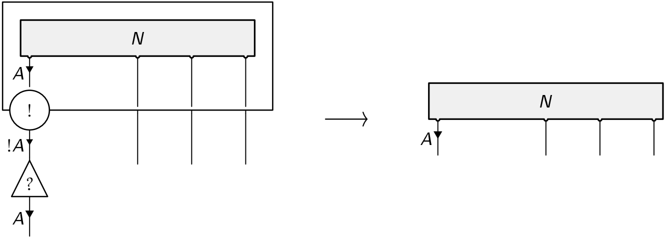
But we need boxes to represent promotion: $\dfrac{\vdash A, ?\Gamma}{\vdash !A, ?\Gamma}$ *prom*



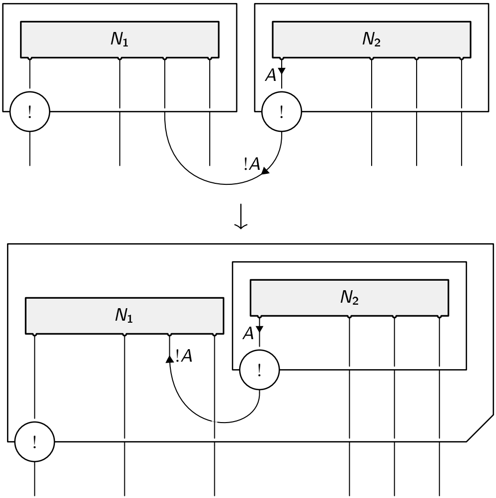
Introduction / Boxes



Introduction / Boxes



Introduction / Boxes



Introduction / Boxes

Boxes are unconventional cells with several principal ports which are parametrized by a net of arbitrary size.

Introduction / Boxes

Boxes are unconventional cells with several principal ports which are parametrized by a net of arbitrary size.

Issues:

- using boxes, the reduction is not automatically confluent anymore (not a big issue)
- reductions are not local
- duplications of top-level boxes prevent parallel computation.

Introduction / Boxes

Boxes are unconventional cells with several principal ports which are parametrized by a net of arbitrary size.

Issues:

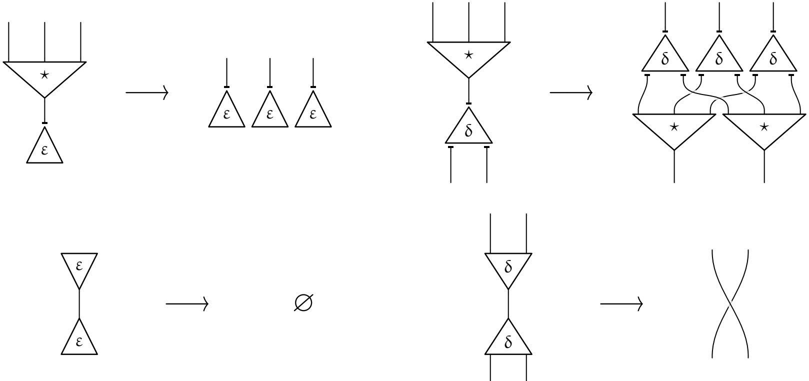
- using boxes, the reduction is not automatically confluent anymore (not a big issue)
- reductions are not local
- duplications of top-level boxes prevent parallel computation.

We'd like to use simple cells to perform locally duplication/erasing of boxes contents. . .

Introduction / Interaction combinators

Two first combinators:

Their interactions:



Introduction / Interaction combinators

How to use them ?

- adding a specific third cell γ, to obtain the original system of *interaction combinators* [Laf97]. (universality property).
- adding a second duplication operator ζ like in the *symmetric interaction combinators* [Maz07].
- using them together with other cells (e.g. multiplicatives)

Introduction / Interaction combinators

How to use them ?

- adding a specific third cell γ, to obtain the original system of *interaction combinators* [Laf97]. (universality property).
- adding a second duplication operator ζ like in the *symmetric interaction combinators* [Maz07].
- using them together with other cells (e.g. multiplicatives)

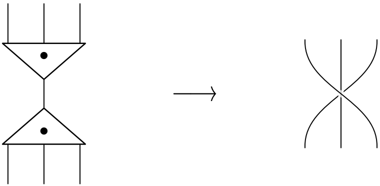
How will we use them ?

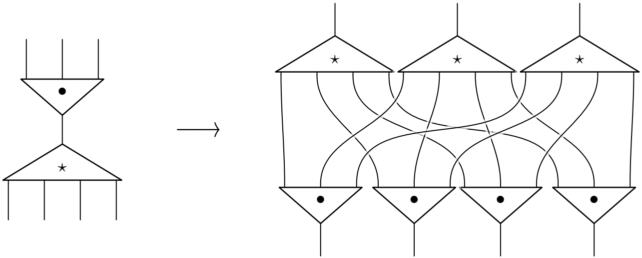
- using them together with logic cells
- and using many of them (indexed by an natural number)

Introduction / Multiplexing

Definition (multiplexing operator)

An operator $\bullet$ is called *multiplexing operator* over a set of operators $\star \in \mathcal{E}$ when its reductions are:

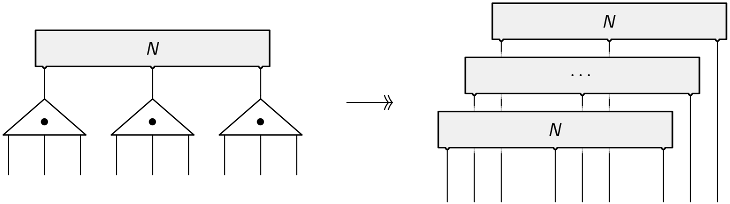




Introduction / Multiplexing

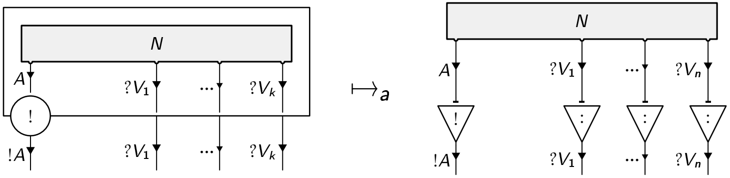
Property (replication by mutiplexing)

Given any operator $\bullet$ that is multiplexing over every operator in a net N supposed to be in normal form and deadlock free:



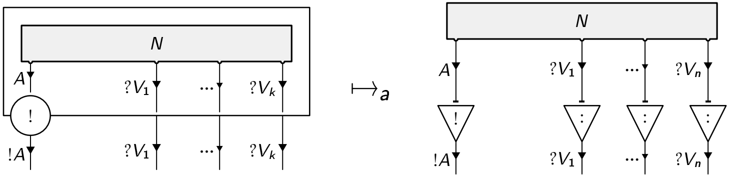
Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

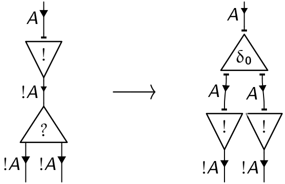


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

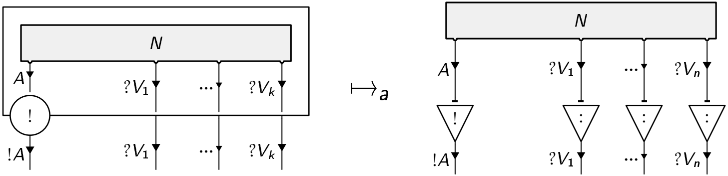


Le fonctionnement:

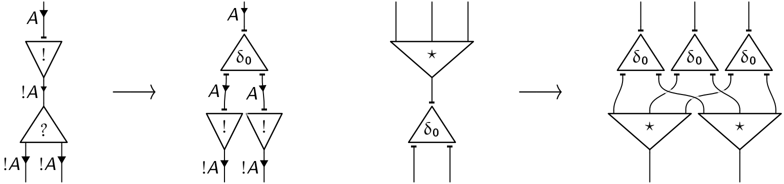


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

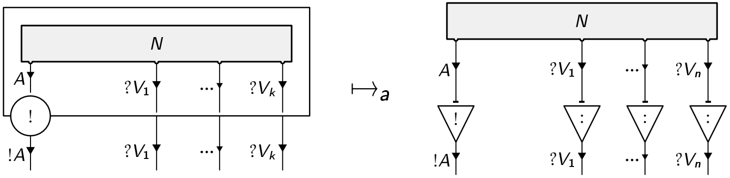


Le fonctionnement:

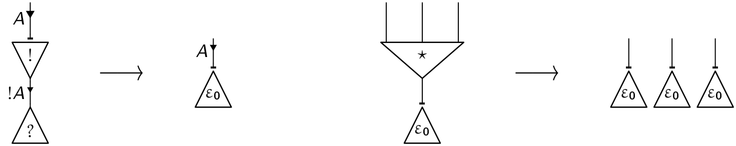


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

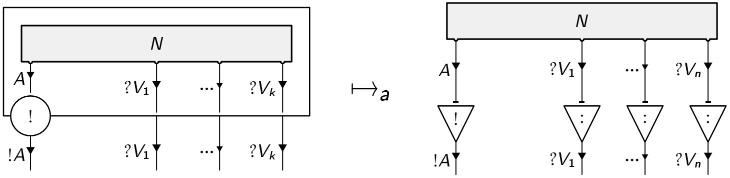


Le fonctionnement:

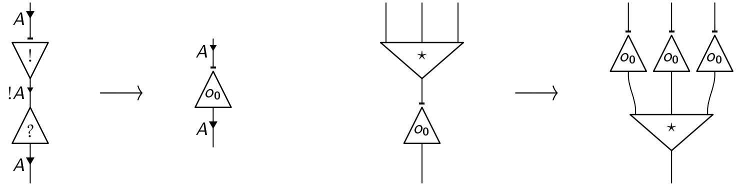


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

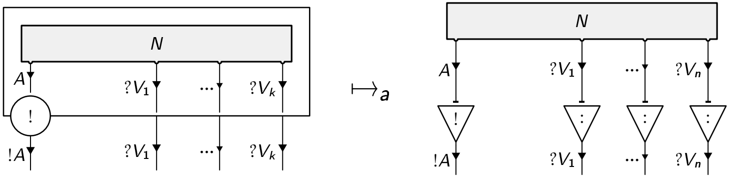


Le fonctionnement:

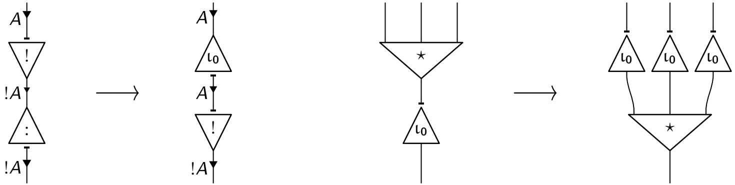


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

L'idée: ne matérialiser que l'interface des boîtes

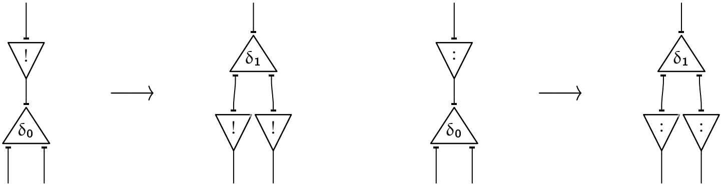


Le fonctionnement:



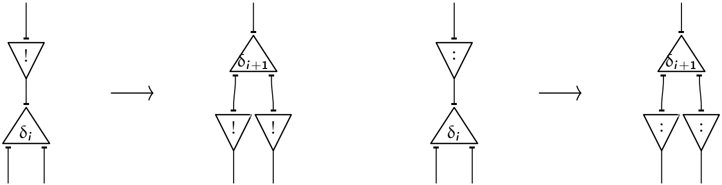
Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Ce qu'il se passe à l'interface des boîtes :



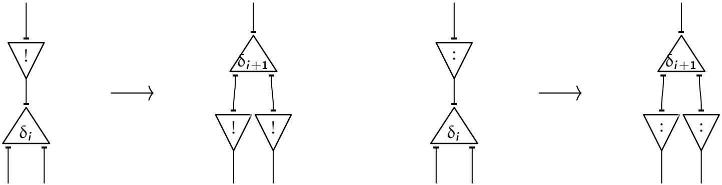
Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Ce qu'il se passe à l'interface des boîtes :

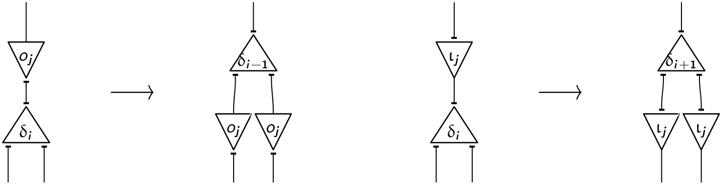


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Ce qu'il se passe à l'interface des boîtes :

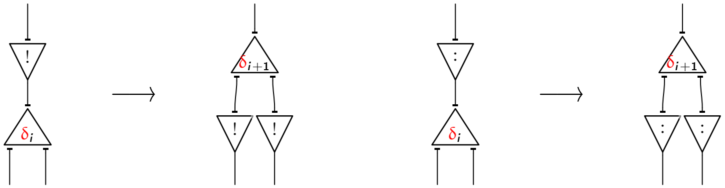


Aussi, lorsque $j < i$:

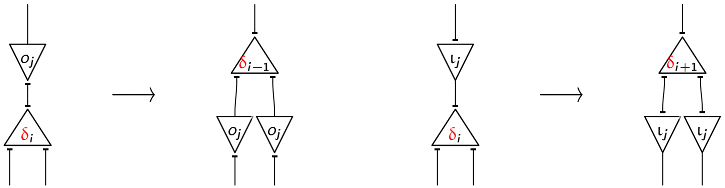


Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Ce qu'il se passe à l'interface des boîtes (pareil pour ε, o, ι):



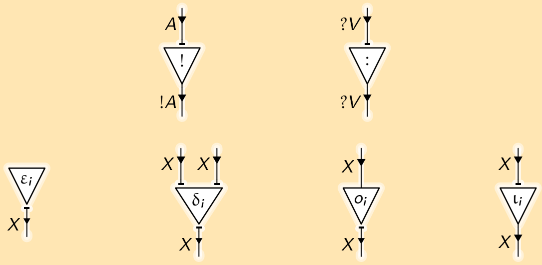
Aussi, lorsque $j < i$:



Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

On a réussi à remplacer les boîtes par différents nœuds simples.

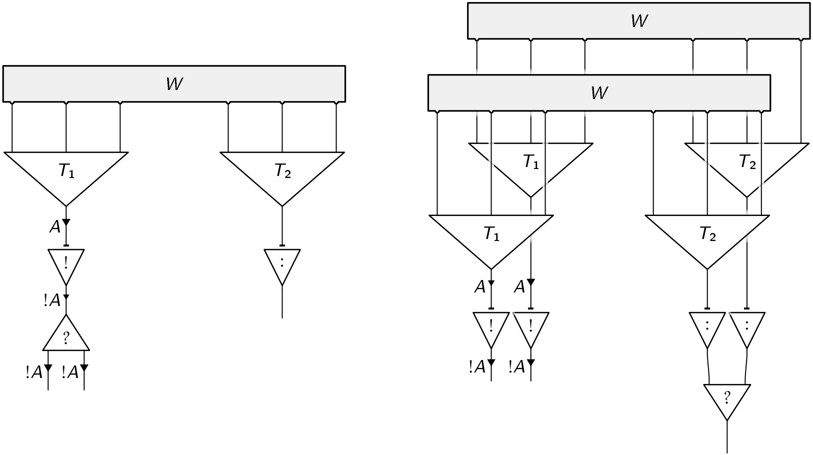
Le système exponentiel localisé actif



- Ce système est similaire au système des « sharing graphs ». (*J. Lamping* [Lam90], puis *G. Gonthier*, *M. Abadi*, *J.-J. Levy*)
- On conserve un peu plus de structure logique, mais pas tout.

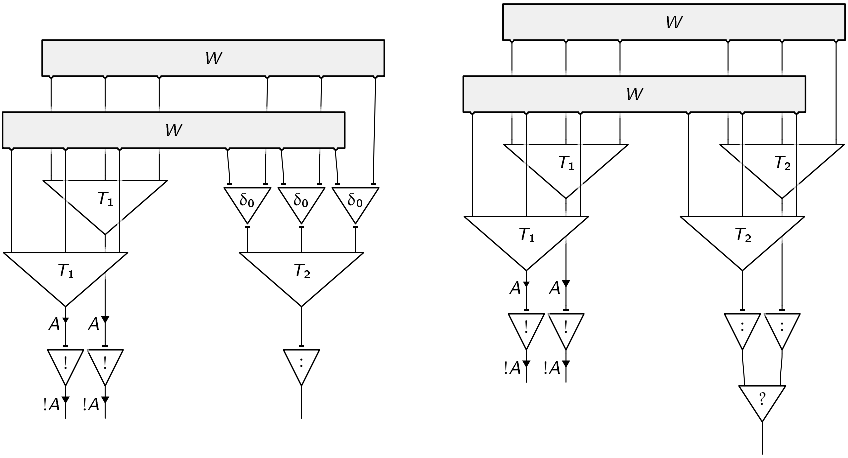
Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Un inconvénient pour ce système actif:



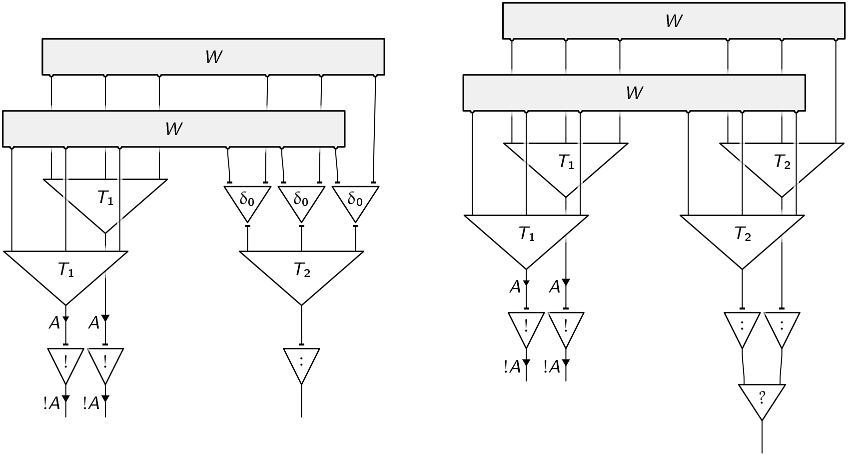
Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

Un inconvénient pour ce système actif:



Localized Proof-nets / Active localization of Exponentials

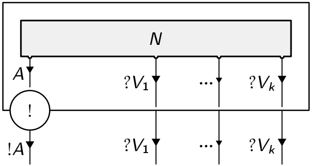
Un inconvénient pour ce système actif:



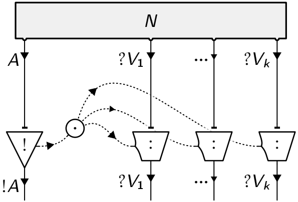
Le problème de la « relecture »
(S. Guerrini, S. Martini, A. Masini [GMM03])

Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

L'idée: un canal de contrôle, et des messages

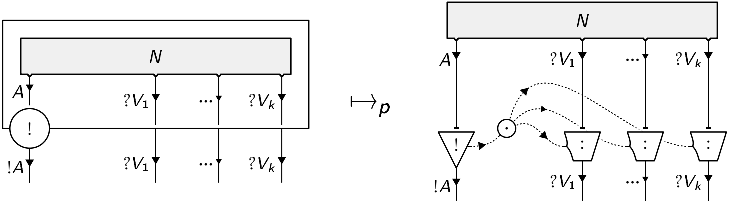


$\longmapsto_p$

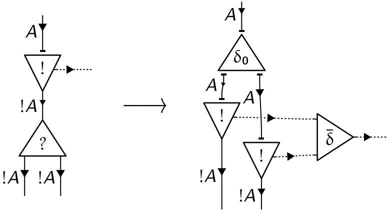


Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

L'idée: un canal de contrôle, et des messages

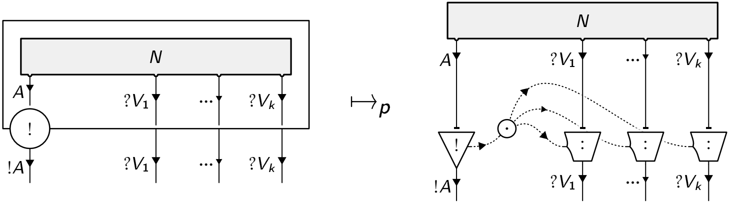


Le fonctionnement:

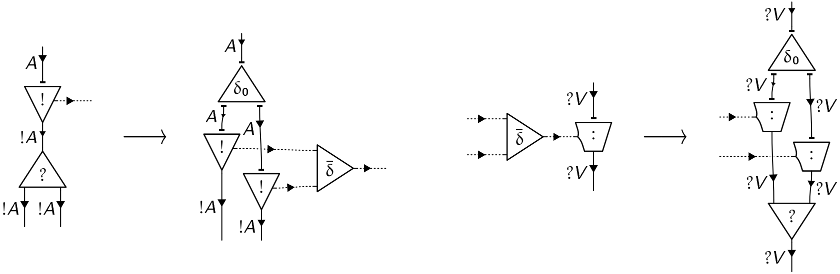


Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

L'idée: un canal de contrôle, et des messages

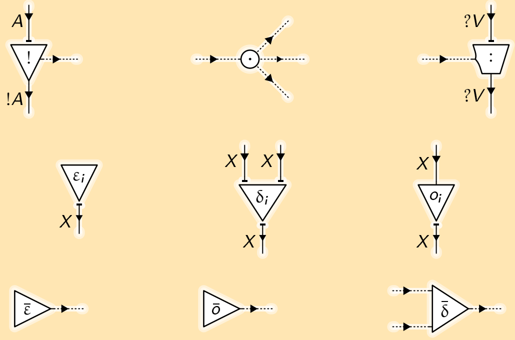


Le fonctionnement:



Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

Le système exponentiel localisé passif



- Les systèmes actif et passif s'inscrivent dans le cadre des réseaux d'interaction, une confluence forte de la réduction est automatiquement assurée.

Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

Theorem

Le codage dans le système exponentiel localisé passif simule faiblement la réduction interne et sans commutations exponentielles des preuves de la logique linéaire.

Corollary

Ce codage simule la normalisation (pour la réduction sans commutations exponentielles) d'une preuve de la logique linéaire.

Localized Proof-nets / Passive localization of Exponentials

Theorem

Le codage dans le système exponentiel localisé passif simule faiblement la réduction interne et sans commutations exponentielles des preuves de la logique linéaire.

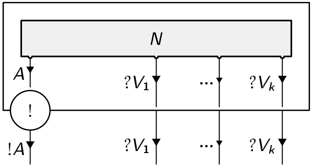
Corollary

Ce codage simule la normalisation (pour la réduction sans commutations exponentielles) d'une preuve de la logique linéaire.

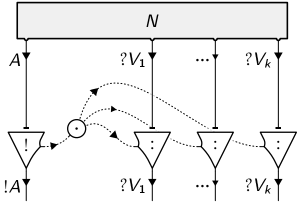
Comment retrouver les commutations exponentielles?

Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

L'idée: des nœuds avec plusieurs ports principaux.

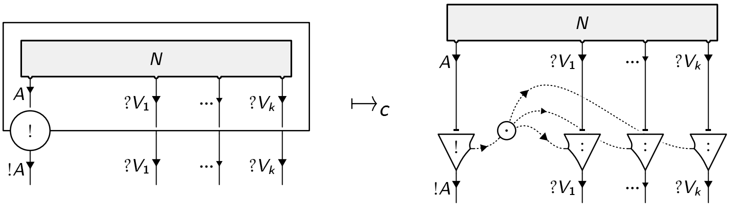


$\longmapsto_c$

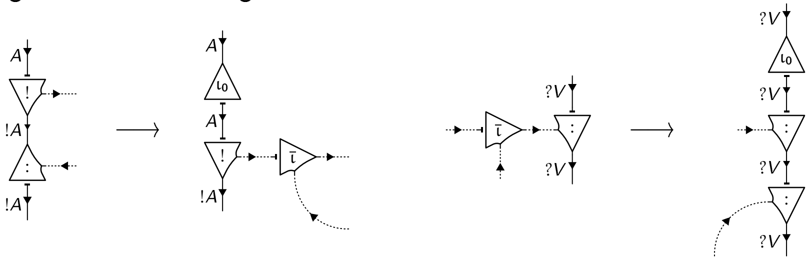


Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

L'idée: des nœuds avec plusieurs ports principaux.

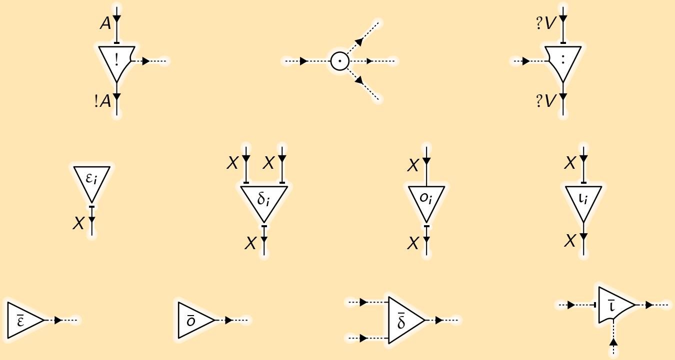


Les opérateurs d'*ingestion* retrouvent leur utilité, et il nous faut également un message associé:



Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

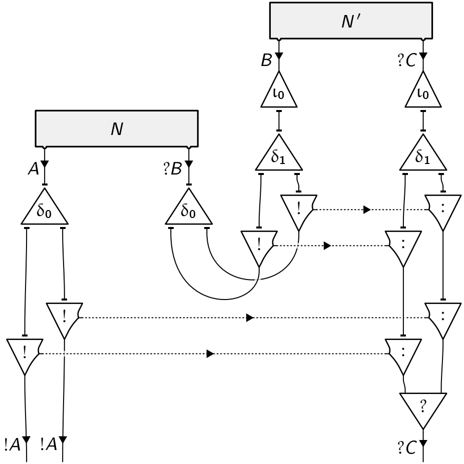
Le système exponentiel localisé contrôlé



- On a utilisé des multi-nœuds, la confluence n'est plus automatique.

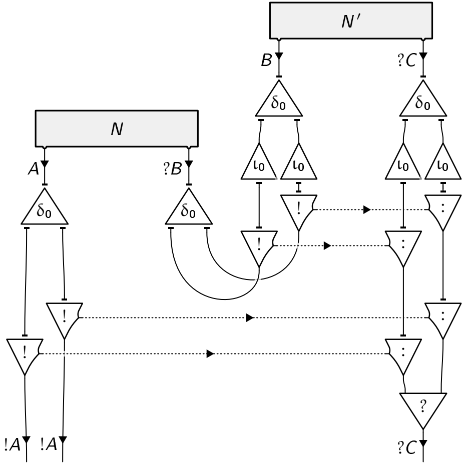
Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

On rate la confluence locale de peu:



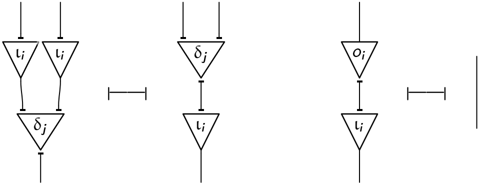
Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

On rate la confluence locale de peu:



Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

Pour la confluence du système contrôlé, il faut d'abord remarquer quelques équivalences:



Theorem

La réduction du système exponentiel localisé contrôlé est localement confluente modulo commutation des opérateurs de boîtes [Hue80].

Localized Proof-nets / Controled localization of Exponentials

Theorem

Le codage dans le système exponentiel localisé contrôlé simule faiblement la réduction interne des preuves de la logique linéaire.

Corollary

Ce codage simule la normalisation (usuelle) d'une preuve de la logique linéaire.

Localized Proof-nets / Summary

système	cardinalité	com. exp.	relecture	nœuds	optimalité?
actif	infini	oui	non	normaux	séquentielle
passif	fini	non	oui	normaux	-
contrôlé	infini	oui	oui	multiples	parallèle

Théorèmes:

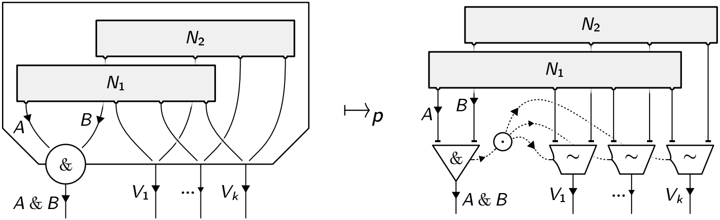
- actif: confluence forte, problème de la relecture
- passif: confluence forte, simulation précise
- contrôlé: confluence modulo, simulation précise

Localized Proof-nets / Additives and Recursion

On peut exécuter le λ-calcul (typé) grâce aux codages présentés.

On parvient également à exécuter le langage *PCF* car la méthode de localisation s'adapte:

- aux boîtes additives:



- à des boîtes de récursion introduites spécifiquement pour coder la construction récursive présente dans *PCF*.

Localized Semantics / Interpretation of types

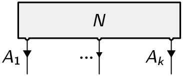
Soit $|\cdot|$ une fonction d'interprétation qui associe un ensemble à tout type de base. On peut l'étendre à tous les types de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcccl} |A \parr B| & = & |A \otimes B| & = & |A| \times |B| \\ |1| & = & |\bot| & = & \mathcal{U} \\ |!A| & = & |?A| & = & \mathcal{M}\,|A| \\ |A \,\&\, B| & = & |A \oplus B| & = & |A| + |B| \\ |\top| & = & |0| & = & \varnothing \end{array}$$

Une preuve Π de $\vdash A_1, \ldots, A_n$ dans la logique linéaire est traditionnellement interprétée par une relation $[\Pi] \subseteq |A_1| \times \cdots \times |A_n|$.

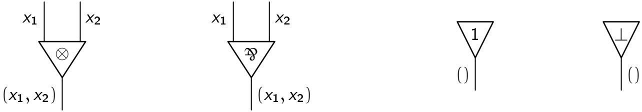
Localized Semantics / Standard relational semantics

Un réseau:



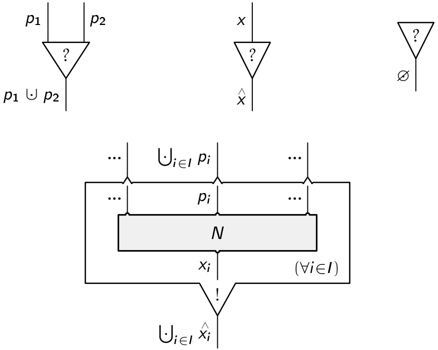
sera aussi interprété dans $|A_1| \times \cdots \times |A_n|$.

Multiplicatifs:



Localized Semantics / Standard relational semantics

Exponentiels:



Localized Semantics / Exponential Trees

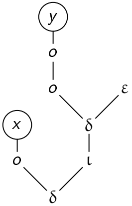
Definition

Soit Δ un ensemble, on appelle arborescences exponentielles les éléments de l'ensemble Δ^e défini par la syntaxe suivante:

$$\Delta^e \quad ::= \quad \varepsilon \;\mid\; \delta\,\Delta^e\,\Delta^e \;\mid\; o\,\Delta \;\mid\; \iota\,\Delta^{ee}$$

Par exemple, si $x, y \in \Delta$ alors l'expression suivante désigne une arborescence exponentielle de Δ^e:

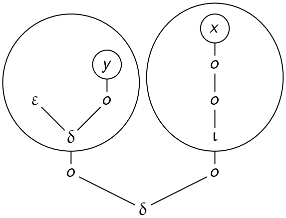
$$\delta\,(o\,x)\,(\iota\,(\delta\,(o\,(o\,y))\,\varepsilon))$$



Localized Semantics / Exponential Trees

On peut aussi construire des arborescences d'arborescences (c'est-à-dire des éléments de Δ^{ee}), par exemple:

$$\delta\,(o\,(\delta\,\varepsilon\,(o\,y)))\,(o\,(\iota\,(o\,(o\,x))))$$



Notamment, le constructeur ι transforme ces arborescences d'arborescences en de simples arborescences.

Localized Semantics / Exponential Trees

Definition (Contextes exponentiels)

Les arborescences de profondeur i d'un ensemble Δ sont les éléments de $\Delta^{(i)}$, qui est défini par:

$$\Delta^{(0)} = \Delta \qquad \Delta^{(i+1)} = \Delta^{(i)e}$$

On note Δ^* l'ensemble des arborescences de Δ de profondeurs arbitraires:

$$\Delta^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta^{(i)}$$

Localized Semantics / Tree closures

To define a local semantics we will change the interpretation space:

- A localized net N with interface $\vdash A_1, \ldots, A_n$ will be interpreted by a relation $[N] \subseteq |A_1|^* \times \cdots \times |A_n|^*$.

Localized Semantics / Tree closures

To define a local semantics we will change the interpretation space:

- A localized net N with interface $\vdash A_1, \ldots, A_n$ will be interpreted by a relation $[N] \subseteq |A_1|^* \times \cdots \times |A_n|^*$.

The idea being that when we got some points:

- $(x_1, \ldots, x_n) \in |A_1| \times \cdots \times |A_n|$
- $(y_1, \ldots, y_n) \in |A_1| \times \cdots \times |A_n|$

in the semantics of some net, we want also:

- $(o\, x_1, \ldots, o\, x_n) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$
- $(o\, y_1, \ldots, o\, y_n) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$
- $(\delta\,(o\, x_1)\,(o\, y_1), \ldots, \delta\,(o\, x_n)\,(o\, y_n)) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$

and so on...

Localized Semantics / Tree closures

To define a local semantics we will change the interpretation space:

- A localized net N with interface $\vdash A_1, \ldots, A_n$ will be interpreted by a relation $[N] \subseteq |A_1|^* \times \cdots \times |A_n|^*$.

The idea being that when we got some points:

- $(x_1, \ldots, x_n) \in |A_1| \times \cdots \times |A_n|$
- $(y_1, \ldots, y_n) \in |A_1| \times \cdots \times |A_n|$

in the semantics of some net, we want also:

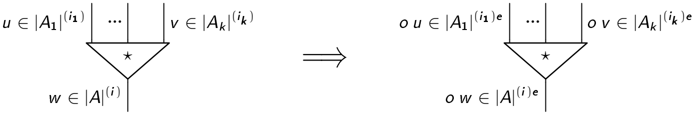
- $(o\, x_1, \ldots, o\, x_n) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$
- $(o\, y_1, \ldots, o\, y_n) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$
- $(\delta\,(o\, x_1)\,(o\, y_1), \ldots, \delta\,(o\, x_n)\,(o\, y_n)) \in |A_1|^e \times \cdots \times |A_n|^e$

and so on...

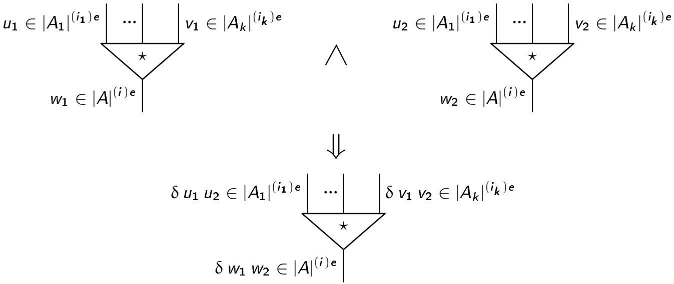
Localized Semantics / Tree closures

This global closure can be enforced locally on the semantics of each operator.

- o-closure:

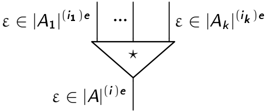


- δ-closure:

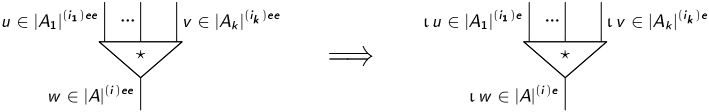


Localized Semantics / Tree closures

- ε-closure:



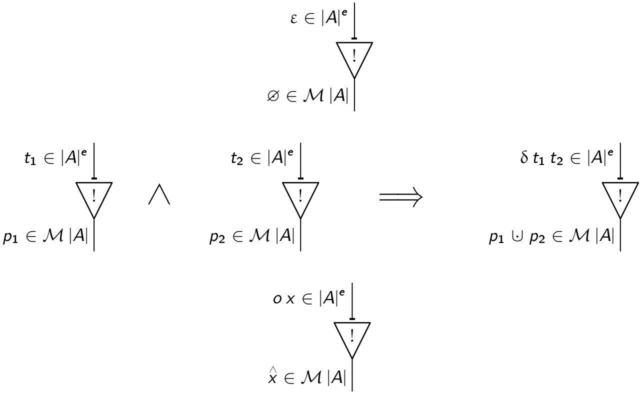
- ι-closure:



Localized Semantics / Without control channels

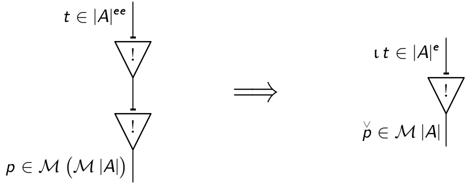
The relational semantics of each operator can now be defined. We add additional rules to generate their points.

Here's what we can do for the active system:

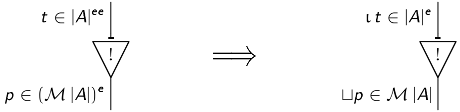


Localized Semantics / Without control channels

Le cas des contextes d'ingestion pourrait lui aussi être traité directement par une déduction de motif:

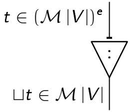


$\sqcup$: $(\mathcal{M}\,\Delta)^e \longrightarrow \mathcal{M}\,\Delta$: écrase par unions une arborescence en un simple multi-ensemble.



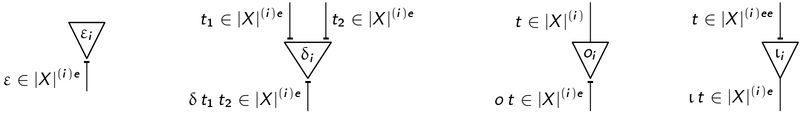
Localized Semantics / Without control channels

D'ailleurs, la sémantique des entrées de *promotion* correspond à cette pure opération:



Localized Semantics / Without control channels

Pour les opérateurs de boîtes, on utilise les motifs suivants (ils dépendent de l'altitude de l'opérateur):



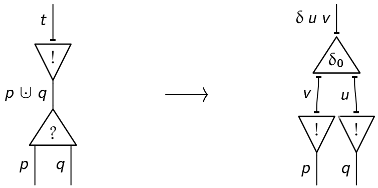
Localized Semantics / Without control channels

Lemma (Dynamique de la sémantique localisée)

La sémantique localisée d'un morceau de réseau (pas nécessairement valide) est affinée par réduction:

$$P \longrightarrow P' \quad \Longrightarrow \quad [P']_a \subseteq [P]_a$$

Example:



Localized Semantics / Without control channels

Theorem

La sémantique localisée d'un réseau valide contient la clôture contextuelle de la sémantique standard de la preuve qui lui est associée.

$$\Pi \mapsto_a N \implies \overline{[\Pi]} \subseteq [N]_a$$

Localized Semantics / Without control channels

Theorem

La sémantique localisée d'un réseau valide contient la clôture contextuelle de la sémantique standard de la preuve qui lui est associée.

$$\Pi \mapsto_a N \implies \overline{[\Pi]} \subseteq [N]_a$$

On aimerait obtenir des égalités à la place des inclusions...

Localized Semantics / Without control channels

Theorem

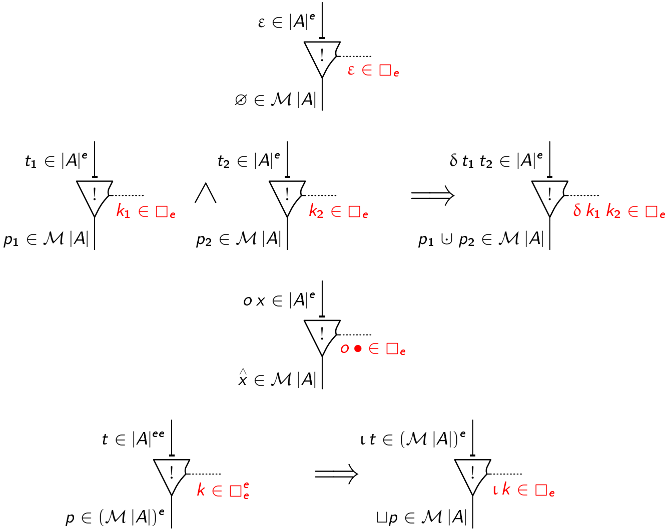
La sémantique localisée d'un réseau valide contient la clôture contextuelle de la sémantique standard de la preuve qui lui est associée.

$$\Pi \mapsto_a N \implies \overline{[\Pi]} \subseteq [N]_a$$

On aimerait obtenir des égalités à la place des inclusions...
Regardons ce qu'il se passe lorsqu'on utilise des canaux de contrôle!
(Pas de différence entre le système passif et le système contrôlé)

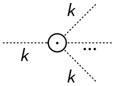
Localized Semantics / With control channels

On étend l'interprétation des types au type associé aux canaux de contrôle exponentiels: $\square_e = \{\,\bullet\,\}^e$

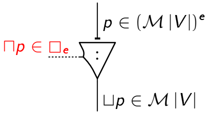


Localized Semantics / With control channels

Et pour les opérateurs de diffusion c'est simple:



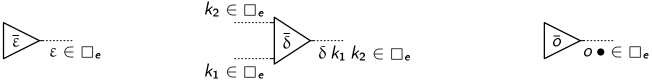
Pour les entrées ça marche de la même manière qu'avant:



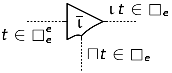
$\sqcap$: $\Delta^e \longrightarrow \{\bullet\}^e$: ne garde que la surface de l'arborescence donnée en argument.

Localized Semantics / With control channels

Les interprétations des opérateurs de boîte sont inchangés.
Les interprétations des messages obéissent aux motifs suivants:



Pour les messages d'ingestion on utilisera:



Localized Semantics / With control channels

Lemma (Dynamique de la sémantique localisée)

La sémantique localisée d'un morceau de réseau (pas nécessairement valide) est affinée par réduction:

$$P \longrightarrow P' \implies [P']_c \subseteq [P]_c$$

Localized Semantics / With control channels

Theorem

La sémantique localisée d'un réseau valide du système contrôlé est égale à la clôture contextuelle de la sémantique standard de la preuve qui lui est associée.

$$\Pi \mapsto_c N \implies \overline{[\Pi]} = [N]_c$$

Corollary (Dynamique de la sémantique localisée d'un réseau valide)

La sémantique localisée d'un réseau valide (du système passif ou contrôlé) est préservée par réduction:

$$N \longrightarrow N' \implies [N']_c = [N]_c$$

Conclusion / What do we have?

Quelques sytèmes localisés (actifs, passif, contrôlé):

- pour le fragment exponentiel
- pour le fragment additif
- pour un fragment récursif

Avantages: exécution simple, stratégies de calculs intéressantes.

Une sémantique addaptée à ces systèmes:

- pour le fragment exponentiel
- pour le fragment additif
- pour un fragment récursif?

Intérêt: sémantique localisée
Contre-partie: manipulation de gros objets (arborescences exponentielles)

Conclusion / What next?

Travail en cours sur la localisation:

- Un moyen de “séquentialiser” les réseaux localisés grâce au calcul des structures.
- Appliquer la méthode de localisation à la *super-promotion* dans le but d’améliorer sa dynamique.

D’autres choses à faire:

- Préciser le sens de l’optimalité parallèle.
- Vérifier que la sémantique localisée garde ses propriétés en présence de récursion.

Et peut-être:

- Améliorer l’implémentation des réseaux d’interaction (Nœuds multi-ports, Utilisation de GPUs).
- Faire un compilateur *Mini-ML* $\mapsto$ *Réseaux*.

Stefano Guerrini, Simone Martini, and Andrea Masini.
Coherence for sharing proof-nets.
Theoretical Computer Science, 294(3):379–409, 2003.

Gérard P. Huet.
Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems.
J. ACM, 27(4):797–821, 1980.

Yves Lafont.
Interaction nets.
Principles of Programming Languages (POPL '90), pages 95–108, 1990.

Yves Lafont.
Interaction combinators.
Information and Computation, 137(1):69–101, 1997.

John Lamping.
An algorithm for optimal lambda calculus reduction.

Principles of Programming Languages (POPL '90), pages 16–30, 1990.

Damiano Mazza.
A denotational semantics for the symmetric interaction combinators.
Mathematical Structures in Computer Science, 17(3), 2007.