

---

# Le calcul des prédicats

---

## Le calcul des prédicats

---

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Calcul de Gentzen
  2. Résolution
    - Théorie de l'unification
    - Règles de résolution
    - Propriétés de la résolution

## Syntaxe : alphabet

---

- Les **connecteurs**  $\rightarrow, \neg, \wedge, \vee$
- Les **quantificateurs**  $\exists, \forall$
- Un ensemble dénombrable de **variables**  $x, y, z, \dots$
- Une **signature**  $\Sigma$  contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction  
 $\Sigma_F = \{f, g, h, \dots\}$ , chacun ayant une arité
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats  
 $\Sigma_P = \{p, q, r, \dots\}$ , chacun ayant une arité

## Les termes

---

### Définition :

- Chaque variable  $x$  dans  $\mathcal{X}$  est un terme dans  $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ .
- Si  $t_1, \dots, t_n$  sont de termes et  $f \in \Sigma_F$  est un symbole de fonction d'arité  $n$ , alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme dans  $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ .

Un terme est **clos** s'il ne contient aucune variable.

## Les atomes

---

**Définition :** Un **atome** est de la forme  $r(t_1, \dots, t_n)$ , où  $p$  est un symbole de prédicat d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n$  sont de termes.

**Exemple :** Si  $\Sigma_F = \{0, S\}$  et  $\Sigma_P = \{inf\}$ , alors  $0$  et  $S(S(S(x)))$  sont de termes,  $0$  et  $S(S(S(S(0))))$  sont de termes clos et  $inf(0, S(S(S(x))))$  est un atome.

## Les formules

---

### Définition :

- Chaque **atome** est une formule.
- Si  $A$  est une formule, alors  $\neg A$  est une formule.
- Si  $A$  et  $B$  sont deux formules,  $A \rightarrow B$ ,  $A \wedge B$ , et  $A \vee B$  sont de formules.
- Si  $A$  est une formule et  $x$  est une variable, alors  $\forall x. A$  et  $\exists x. A$  sont de formules.

**Exemple :**  $\forall x. (\text{enfant}(x) \rightarrow \exists y. \text{mere}(y, x))$

## Le calcul propositionnel comme un calcul des prédicats

---

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature  $\Sigma$  t.q.

- l'ensemble  $\Sigma_F$  est vide
- l'ensemble  $\Sigma_P$  contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont pas utilisés

## Variables libres et liées

---

Les variables **libres** (VI) et **liées** (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si  $A$  est un atome,  $VI(A)$  contient toutes les variables de  $A$ , et  $VE(A) = \emptyset$ .
- Si  $A = \neg B$ ,  $VI(A) = VI(B)$  et  $VE(A) = VE(B)$ .
- Si  $A = B \# C$ ,  $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$  et  $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$ .
- Si  $A = \forall x. B$  ou  $A = \exists x. B$ ,  $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$  et  $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$ .

**Exemple :** Si  $A = \forall x. q(x, f(x, y))$  on a  $VI(A) = \{y\}$  et  $VE(A) = \{x\}$ .

Si  $B = r(x) \vee \forall x. q(x, f(x, y))$  on a  $VI(B) = \{x, y\}$  et  $VE(B) = \{x\}$ .

**Remarque :** On suppose que l'on peut **toujours renommer** les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme **rectifiée** :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e.  $\forall x. \exists x. A$ .
- les variables libres et liées d'une formule  $A$  portent de noms distincts, i.e.  $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$ . On ne peut plus écrire la formule  $B$  précédente.

À partir de maintenant on travaille uniquement avec de formules rectifiées. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

## Les substitutions

---

### Définition :

- Une **substitution** est une fonction  $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ . On note  $\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  si  $\sigma(x_i) = t_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
- L'application d'une **substitution** à un terme est l'**extension** de  $\sigma$  aux termes donnée par  $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$ .
- Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux substitution. La **composition** de  $\sigma$  avec  $\tau$  est donnée par  $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$ .
- Si  $\sigma$  est une substitution, alors la substitution  $\sigma[x := t]$  est donnée par  $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$  si  $y \neq x$  et  $\sigma[x := t](x) = t$  sinon.

## Substitution d'une formule

---

Soit  $\Sigma$  une signature et  $\mathcal{X}$  un ensemble de variables.

**Définition :** Soit  $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  une substitution. La substitution d'une formule  $A$  par  $\sigma$  est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de  $x_i$  dans  $A$  par  $t_i$ . Par récurrence sur  $A$  :

- $\sigma(r(t_1, \dots, t_n)) = r(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$  et  $\sigma(B\#C) = \sigma(B)\#\sigma(C)$
- $A = \forall x. B$ 
  - Si  $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $\sigma(\forall x. B) = \forall x. \sigma(B)$
  - Si  $x = x_i$ , alors  $\sigma(\forall x. B) = \forall x. \sigma[x := x](B)$ .
- Pareil pour  $\sigma(\exists x. B)$

## Formalisation du langage naturel

---

- Tous les hommes sont méchants.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Seulement les hommes sont méchants.

$$\forall x. (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un homme méchant.

$$\exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il n'existe pas d'homme méchant.

$$\neg \exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un homme qui aime tous les chiens.

$$\exists x. (H(x) \wedge \textit{Aimetousleschiens}(x))$$

$$\textit{Aimetousleschiens}(x) \equiv \forall y. (\textit{Chien}(y) \rightarrow \textit{Aime}(x, y))$$

- Chaque homme connaît qui la déteste.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow \textit{Connaitdeteste}(x))$$

$$\textit{Connaitdeteste}(x) \equiv \forall y. (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un **et** personne n'aime tout le monde **ou bien** quelqu'un aime tout le monde **et** quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$

$$\text{aimetoutlemonde}(x) \equiv \forall y. \text{Aime}(x, y)$$

$$\text{aimepersonne}(x) \equiv \forall y. \neg \text{Aime}(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x. (H(x) \rightarrow \exists y. \text{Aime}(x, y))$$

$$B_1 \equiv \neg \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$A_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$B_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimepersonne}(x))$$

## Sémantique du calcul de prédicats

---

**Définition :** L'interprétation d'une signature  $\Sigma$  est un triplet  $\langle \mathcal{D}, F_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}} \rangle$  t.q.

- Pour chaque  $f \in \Sigma_F$  d'arité  $n$ , il y a une fonction  $\mathcal{I}(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  dans  $F_{\mathcal{D}}$
- Pour chaque  $p \in \Sigma_P$  d'arité  $n$ , il y a une fonction booléenne  $\mathcal{I}(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathbf{BOOL}$

**Définition :** Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation pour  $\Sigma$  ayant  $\mathcal{D}$  comme domaine et soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de variables. Une **assignation** ou **valuation** dans  $\mathcal{I}$  est une fonction  $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Notation :** Si  $\sigma$  est une assignation, alors l'assignation  $\sigma[x := d]$  vérifie  $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$  si  $y \neq x$  et  $\sigma[x := d](x) = d$  sinon.

## Interprétation d'un terme

---

**Définition :** Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation et soit  $\sigma$  assignation dans  $\mathcal{I}$ . Alors l'**interprétation d'un terme**  $t$  dans  $\mathcal{I}$  pour  $\sigma$ , notée  $[t]_{\mathcal{I},\sigma}$  est définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

**Remarque :** Lorsque le symbole de fonction  $f$  est 0-aire (d'arité 0), alors  $\mathcal{I}(f)$  est une fonction constante.

## Interprétation d'une formule

---

**Définition :** L'interprétation d'une formule  $A$  dans une interprétation  $\mathcal{I}$  pour une assignation  $\sigma$ , notée  $[A]_{\mathcal{I},\sigma}$ , est définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$

- $[\exists x. A]_{\mathcal{I}, \sigma} =$ 
  - **V** s'il existe  $d \in \mathcal{D}$  t.q.  $[A]_{\mathcal{I}, \sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - **F** sinon
- $[\forall x. A]_{\mathcal{I}, \sigma} =$ 
  - **V** si pour tout  $d \in \mathcal{D}$ ,  $[A]_{\mathcal{I}, \sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - **F** sinon

**Remarque** : Lorsque le symbole de prédicat  $p$  est 0-aire (d'arité 0), alors  $\mathcal{I}(p)$  est **V** ou **F**.

## Nouvelles notions de satisfiabilité

---

### Définition :

- $\mathcal{I}$  **satisfait** une **formule**  $B$  si pour toute valuation  $\sigma$  dans  $\mathcal{I}$ ,  
 $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ .
- $\mathcal{I}$  **falsifie** une **formule**  $B$  s'il existe une valuation  $\sigma$  dans  $\mathcal{I}$  t.q  
 $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$ .

On verra plus tard que pour étudier la satisfiabilité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

## Rappel : les notions de validité, conséquence logique

---

### Définition :

- Une **formule**  $B$  est **valide** si toute interprétation  $\mathcal{I}$  satisfait  $B$ .
- Une **formule**  $B$  est **conséquence logique** d'un **ensemble de formules**  $\Delta$ , noté  $\Delta \models B$ , si toute interprétation qui satisfait  $\Delta$  satisfait aussi  $B$ .
- Deux formules  $A$  et  $B$  sont **équivalentes**, noté  $A \equiv B$ , ssi  $\{A\} \models B$  et  $\{B\} \models A$ .

## Quelques exemples de conséquence logique

---

$$\exists y. \forall x. A \quad \models \quad \forall x. \exists y. A$$

$$\exists x. (A \wedge B) \quad \models \quad \exists x. A \wedge \exists x. B$$

$$\forall x. A \vee \forall x. B \quad \models \quad \forall x. (A \vee B)$$

## Quelques exemples d'équivalence

---

$$\forall x. A \equiv \neg \exists x. \neg A$$

$$\neg \forall x. A \equiv \exists x. \neg A$$

$$\exists x. A \equiv \neg \forall x. \neg A$$

$$\neg \exists x. A \equiv \forall x. \neg A$$

$$\forall x. (A \wedge B) \equiv \forall x. A \wedge \forall x. B$$

$$\exists x. (A \vee B) \equiv \exists x. A \vee \exists x. B$$

$$\exists x. (A \rightarrow B) \equiv \forall x. A \rightarrow \exists x. B$$

$$\forall x. \forall y. A \equiv \forall y. \forall x. A$$

$$\exists x. \exists y. A \equiv \exists y. \exists x. A$$

## D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

---

$$\forall x. A \quad \equiv \quad \exists x. A \quad \equiv \quad A$$

$$\forall x. (A \wedge B) \quad \equiv \quad A \wedge \forall x. B$$

$$\exists x. (A \wedge B) \quad \equiv \quad A \wedge \exists x. B$$

$$\forall x. (A \vee B) \quad \equiv \quad A \vee \forall x. B$$

$$\exists x. (A \vee B) \quad \equiv \quad A \vee \exists x. B$$

$$\exists x. (A \rightarrow B) \quad \equiv \quad A \rightarrow \exists x. B$$

$$\forall x. (A \rightarrow B) \quad \equiv \quad A \rightarrow \forall x. B$$

$$\exists x. (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad \forall x. B \rightarrow A$$

$$\forall x. (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad \exists x. B \rightarrow A$$