Le calcul propositionnel

Logique Propositionnelle

- Syntaxe
- Sémantique
- Définissabilité
- Systèmes de preuves
  - Systèmes de preuves sémantiques (tables de vérité)
  - Systèmes de preuves syntaxiques

Syntaxe de la logique propositionnelle

Soit $\mathcal{R}$ en ensemble dénombrable de lettres dites propositionnelles.

Définition : L'ensemble de formules de la logique propositionnelle est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{R}$ et fermé par les opérations binaires $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$ et l'opération unaire $\neg$.

Exemple :	$\neg(p)$	$\vee(p,p)$	$\longrightarrow(\wedge(p,q),\neg(r))$
Autre notation :	$\neg p$	$p \vee p$	$(p \wedge q) \longrightarrow \neg r$

Notation : On écrira $\#$ pour $\vee$, $\wedge$ ou $\longrightarrow$.

Remarque : C'est un ensemble inductif, donc on pourra appliquer le principe d'induction.

$\mathcal{SF}(A)$: sous-formules d'une formule A

- Si A est une lettre p, $\mathcal{SF}(A) = \{p\}$.
- Si A est $\neg(B)$, $\mathcal{SF}(A) = \{\neg B\} \cup \mathcal{SF}(B)$.
- Si A est $\#(B, C)$, $\mathcal{SF}(A) = \{\#(B, C)\} \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$.

Sémantique de la logique propositionnelle

Étant donnée une valeur de l'ensemble $\mathbf{BOOL} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ pour chaque lettre propositionnelle, on veut établir la valeur d'une formule propositionnelle A.

- Fixer une interprétation qui donne $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$ à chaque lettre propositionnelle.
- Définir la fonction booléenne unaire $\mathcal{FB}_{\neg} : \mathbf{BOOL} \to \mathbf{BOOL}$ et les fonctions booléennes binaires $\mathcal{FB}_{\vee}, \mathcal{FB}_{\wedge}, \mathcal{FB}_{\rightarrow} : \mathbf{BOOL}^2 \to \mathbf{BOOL}$.
- Construire la valeur de vérité de la formule A.

La fonction booléenne unaire

$$
\begin{aligned}
\mathcal{FB}_{\neg}(\mathbf{V}) &= \mathbf{F} \\
\mathcal{FB}_{\neg}(\mathbf{F}) &= \mathbf{V}
\end{aligned}
$$

Les fonctions booléennes binaires

$$\begin{aligned}
\mathcal{FB}_{\vee}(\mathbf{V},\mathbf{V}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\vee}(\mathbf{V},\mathbf{F}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\vee}(\mathbf{F},\mathbf{V}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\vee}(\mathbf{F},\mathbf{F}) &= \mathbf{F}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\mathcal{FB}_{\wedge}(\mathbf{V},\mathbf{V}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\wedge}(\mathbf{V},\mathbf{F}) &= \mathbf{F} \\
\mathcal{FB}_{\wedge}(\mathbf{F},\mathbf{V}) &= \mathbf{F} \\
\mathcal{FB}_{\wedge}(\mathbf{F},\mathbf{F}) &= \mathbf{F}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{FB}_{\rightarrow}(\mathbf{V},\mathbf{V}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\rightarrow}(\mathbf{V},\mathbf{F}) &= \mathbf{F} \\
\mathcal{FB}_{\rightarrow}(\mathbf{F},\mathbf{V}) &= \mathbf{V} \\
\mathcal{FB}_{\rightarrow}(\mathbf{F},\mathbf{F}) &= \mathbf{V}
\end{aligned}$$

Valeur de vérité d'une formule A par rapport à une interprétation I

- Si A est une lettre p, $[A]_I = I(p)$.
- Si A est $\neg(B)$, $[A]_I = \mathcal{FB}_\neg([B]_I)$.
- Si A est $\#(B, C)$, $[A]_I = \mathcal{FB}_\#([B]_I, [C]_I)$.

Exercice : Soit I l'intepprétation $I(p) = \mathbf{V}$, $I(q) = \mathbf{F}$. Calculer la valeur de vérité de la formule $(p \vee q) \rightarrow \neg(q \wedge q)$ par rapport à I.

Tables de vérité

À quoi sert ? Méthode pour raisonner sur les modèles de formules propositionnelles.

Comment ça marche ? Soit A une formule ayant comme lettres propositionnelles l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_n\}$ et dont l'ensemble de sous-formules est $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

1. Construire une table où chaque colonne est étiquetée par une lettre p_i ou bien par une sous-formule A_j.
2. Pour chaque ligne m de la table :
   (a) Donner une interprétation I_m aux lettres $p_1, \ldots, p_n$.
   (b) Calculer les valeurs $[A_1]_{I_m}, \ldots, [A_k]_{I_m}$

Satisfaire et falsifier une formule

Soit I une intepprétation, A une formule et Δ un ensemble de formules.

Définition :

I satisfait une formule A si $[A]_I = \mathbf{V}$

I falsifie une formule A si $[A]_I = \mathbf{F}$.

I satisfait un ensemble de formules Δ si I satisfait toute formule de Δ.

I falsifie un ensemble de formules Δ ssi il existe au moins une formule A dans Δ telle que $[A]_I = \mathbf{F}$.

Formules satisfaisables, contradictoires, valides

Définition : Une formule A est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I qui satisfait A. Un ensemble de formules Δ est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait Δ, c'est à dire s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait toutes les formules de Δ en même temps.

Définition : Une formule A est contradictoire si elle n'est pas satisfaisable, c'est à dire s'il n'existe pas d'interprétation I qui satisfait A (si toute interprétation falsifie A). Un ensemble de formules Δ est contradictoire si il n'est pas satisfaisable (s'il n'existe pas d'interprétation qui satisfait toutes les formules de Δ en même temps).

Conséquence logique et validité

Définition : Une formule A est valide si toute interprétation satisfait A. Un ensemble de formules Δ est valide si toute formule de Δ est valide.

Définition : Une formule A est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models A$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi A.

Comment lire une table de vérité ?

- Si la colonne étiquetée par la formule A (qui est une sous-formule de A) ne contient que de $\mathbf{V}$, alors A est valide.
- Si la colonne de la formule A ne contient que de $\mathbf{F}$, alors A est contradictoire.
- Sinon, l'interprétation qui rends $\mathbf{V}$ la colonne de la formule A satisfait A et l'interprétation qui rends $\mathbf{F}$ la colonne de la formule A falsifie A.

Équivalence logique

Définition : Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Remarque : $A \equiv B$ ssi $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ est valide.

Encore quelques exemples

(Associativité)	$(A \vee B) \vee C$	$\equiv$	$A \vee (B \vee C)$
	$(A \wedge B) \wedge C$	$\equiv$	$A \wedge (B \wedge C)$
(Commutativité)	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
	$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$
(Idempotence)	$A \vee A$	$\equiv$	A
	$A \wedge A$	$\equiv$	A
(Lois de De Morgan)	$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
(Distributivité)	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(Loi de la double négation)	$\neg\neg A$	$\equiv$	A
(Définissabilité de $\rightarrow$)	$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Remarques

1. $\{E_1, \ldots, E_n\} \models A$ ssi la formule $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \rightarrow A$ est valide.
2. Si Δ est satisfaisable et $\Gamma \subseteq \Delta$, alors Γ est satisfaisable.
3. L'ensemble vide est satisfaisable.
4. L'ensemble de toutes les formules est contradictoire.
5. Si Δ est satisfaisable, alors Δ est finiment satisfaisable.
6. Si Γ est contradictoire et $\Gamma \subseteq \Delta$, alors Δ est contradictoire.
7. Toute formule est conséquence logique d'un ensemble insatisfaisable de formules.
8. Toute formule valide est conséquence logique d'un ensemble quelconque de formules, en particulier de l'ensemble vide.

9. A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable.
10. $\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ est insatisfaisable.

Théorème de compacité

Théorème : Un ensemble de formules Δ est satisfaisable ssi tout sous-ensemble fini de Δ est satisfaisable.

Définissabilité

Définition : Soit A une formule avec n lettres propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 0)$. La fonction booléenne n-aire qui réalise la formule A est une fonction $\mathcal{FB}_A : \mathbf{BOOL}^n \to \mathbf{BOOL}$ telle que

$$\mathcal{FB}_A(v_1, \ldots, v_n) = [A]_I \text{ si } I(p_i) = v_i$$

pour toute interprétation I de $p_1, \ldots, p_n$.

Ensemble de connecteurs complet

Définition : Un ensemble $\mathcal{C}$ de connecteurs est complet ssi pour toute fonction booléenne f il existe une formule A contenant uniquement des connecteurs de $\mathcal{C}$ telle que f réalise A.

Théorème : L'ensemble $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.

Intuition de la preuve

v_1	v_2	v_3	$f(v_1, v_2, v_3)$	
V	**V**	**V**	**V**	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee$
V	**V**	**F**	**F**	
V	**F**	**V**	**F**	
V	**F**	**F**	**V**	$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee$
F	**V**	**V**	**V**	$(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee$
F	**V**	**F**	**V**	$(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee$
F	**F**	**V**	**F**	
F	**F**	**F**	**V**	$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$