## Résolution

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude



## Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$



## D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & \\
\forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A &
\end{array}
$$



## Forme prénexe

**Définition :** Une formule $G$ est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ A$, où chaque $Q_i$ est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et $A$ ne contient pas de quantificateur.

**Théorème :** Pour toute formule $G$ il existe une forme $G'$ en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

## Skolemisation partielle

**Définition :** Soit $G$ une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit $f$ un nouveau symbole de fonction $n$-aire. La formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A\{x_{n+1}/f(x_1, \ldots, x_n)\}$ est la skolemisation partielle de $G$.

**Lemme :** Soit $G$ une formule prénexe et soit $G'$ sa skolemisation partielle. Alors $G$ est satisfaisable ssi $G'$ est satisfaisable.



## Forme de Skolem

**Définition :** Soit $G$ une formule prénexe ayant $n$ quantificateurs $\exists$. La forme de Skolem de $G$ est la formule obtenue par $n$ applications successives de la skolemisation partielle.

**Théorème :** Soit $G'$ la forme de Skolem de la formule $G$. Alors

- Si $G$ contient $n$ quantificateurs $\exists$, $G'$ contient $n$ nouveau symboles de fonction
- $G'$ ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- $G$ est satisfaisable ssi $G'$ est satisfaisable.



## Forme clausale

**Définition :**

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$ où chaque $L_i$ est un littéral. La clause vide s'écrit $\perp$.

**Théorème :** Pour toute formule $G$ il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- $G$ est satisfaisable ssi $\mathcal{C}_G$ est satisfaisable.



## Résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)}\ (coupure)$$

où $\sigma$ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \ (factorisation)$$

où

- $L = r(s_1, \ldots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \ldots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \ldots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \ldots, t_n)$)
- $\sigma$ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$



**Rappel :** Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \ldots, s_n)$ et $r(t_1, \ldots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \qquad \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\perp}$$

**Notation :** Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R F$ si $F$ est dérivée à partir de l'ensemble $\Delta$ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si $\perp$ est dérivée à partir de l'ensemble $\Delta$ par résolution.



## Propriétés de la résolution

**Théorème :** La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R F$, alors $\Delta \models F$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors $\Delta$ est insatisfaisable.

**Théorème :** La résolution est complète, i.e., si $\Delta \models F$, alors $\Delta \vdash_R F$ et si $\Delta$ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.



## Vers la complétude de la résolution

Soit $\Sigma$ une signature contenant au moins une constante.

**Définition :**

- L'univers d'Herbrand de $\Sigma$ est l'ensemble de termes clos sur $\Sigma$.
- La base d'Herbrand est l'enseble d'atomes clos sur $\Sigma$.
- Une interprétation de Herbrand de $\Sigma$ est une interprétation t.q.
  - Son domaine est l'univers d'Herbrand
  - Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité $n$, $\mathcal{I}(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

**Conséquence :** Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité $n$, on peut identifier $\mathcal{I}(p)$ à un sous-ensemble $\mathcal{S}_p$ de la base de Herbrand t.q. $\mathcal{I}(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_p$.

## Lemmes pour le Théorème de Herbrand

**Lemme :** Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres d'un terme $t$. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et $\sigma$ une valuation dans $\mathcal{I}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[t]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

**Lemme :** Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres d'une formule $G$. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et $\sigma$ une valuation dans $\mathcal{I}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

**Exercice :** Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1/a, x_2/s(a)\}$. Soit $\mathcal{I}(r)(n,m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $\mathcal{I}(a) = 0$ et $\mathcal{I}(s)(n) = n+1$. Vérifier le résultat précédent.



## Théorème de Herbrand

**Théorème :** Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ est satisfaisable ssi il existe une interprétation $\mathcal{I}$ de Herbrand t.q. $\mathcal{I}$ satisfait $\mathcal{C}$.



## Arbres sémantiques complets

**Définition :** Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une énumération de tous les atomes clos d'une signature $\Sigma$. L'arbre sémantique complet associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

- la racine est $B_0$
- chaque nœud $B_i$ possède un arc gauche $\mathbf{V}$ et un arc droite $\mathbf{F}$
- tous les successeurs de $B_i$ sont étiquetés par $B_{i+1}$

**Exercice :**

1. Construir un arbre sémantique complet $A_1$ pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construir un arbre sémantique complet $A_2$ pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \ldots$.



## Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

**Définition :** Soit $A$ un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un nœud $n$ de $A$ est dit nœud d'échec pour $\mathcal{C}$ ssi le segment de la branche qui va de la racine de $A$ jusqu'à $n$ suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de $\mathcal{C}$ et si aucun prédécesseur de $n$ n'est un nœud d'échec de $A$.

**Exercice :** Identifier dans les arbres $A_1$ et $A_2$ au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \vee q(x), q(a), r(a)\}$.

**Exercice :** Si $\perp \in \mathcal{C}$, qu'est-ce qu'on peut dire par rapport aux nœuds d'échec pour $\mathcal{C}$ ?

## Arbres sémantiques partiels

**Définition :** Soit $A$ un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ est un arbre obtenu à partir de $A$ en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

**Définition :** Un arbre sémantique partielle $A$ est clos s'il est fini et si toute feuille de $A$ est un nœud d'échec.

**Exercice :** Construire un arbre sémantique partielle clos associé à $\mathcal{C} = \{\neg r(x) \vee q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.



## Corollaire du théorème de Herbrand

**Théorème :** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait $\mathcal{C}$ ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

**Corollaire :** Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ est insatisfaisable ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.



## Complétude de la résolution

**Lemme :** Soient $C_1$ et $C_2$ deux clauses. Soient $C_1'$ et $C_2'$ deux instances de $C_1$ et $C_2$ respectivement. Soit $C_{res}'$ la clause obtenue par appliquation d'un pas de résolution (coupure ou factorisation) à $C_1'$ et $C_2'$. Alors il existe une clause $C_{res}$ t.q.
- $C_{res}'$ est une instance de $C_{res}$
- $C_{res}$ est obtenue par résolution à partir de $C_1$ et $C_2$.

**Théorème :** La résolution est complète, i.e., si $\Delta \models G$, alors $\Delta \vdash_R G$ et si $\Delta$ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.