
La résolution en calcul propositionnel

Résolution

Méthode par réfutation :

$\Delta \models A$ ssi A s'obtient à partir de Δ par résolution

$\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ insatisfaisable iff $\Delta \cup \{\neg A\}$ est réfutable

Forme Normale Conjonctive (DNC)

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une **clause** est une formule de la forme $l_1 \vee \dots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La **clause vide** ($n = 0$) s'écrit \perp .
- Une formule est en **forme normal conjonctive** ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une **conjonction élémentaire** est une formule de la forme $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La **conjonction élémentaire vide** ($n = 0$) s'écrit \top .
- Une formule est en **forme normal disjonctive** ssi elle est de la forme $C_1 \vee \dots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i . Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \dots, D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

$$A \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee$$
$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\neg A \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$$
$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$A \equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge$$
$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C} \text{ (coupure)} \quad \frac{p \quad \neg p}{\perp} \text{ (cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} \text{ (factorisation)}$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r} \quad \neg r}{p \vee r}}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est **réfutable** ssi $\Delta \vdash_R \perp$.

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r} \quad \neg r}{p \vee r} \quad \neg p}{p} \perp$$

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \perp$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est **complète**, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_R A$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.