

## La théorie de l'unification

---

- Retour sur les substitutions
- Les unificateurs
- Les formes résolues
- Les règles de transformation
- Algorithme d'unification
- Correction et complétude de l'algorithme

## Retour sur la notion de substitution

---

### Définition :

- Une **substitution** est une fonction  $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ .
- Le **domaine** d'une substitution  $\sigma$  est l'ensemble  $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$ .
- Le **codomaine** d'une substitution  $\sigma$  est l'ensemble  $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$ .
- Un **renommage** est une substitution **injective**  $\sigma$  t.q.  $\sigma(x) = y \forall x \in Dom(\sigma)$ .
- Si le domaine d'une substitution  $\sigma$  est **fini** on note  $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  si  $\sigma(x_i) = t_i$  et  $x_i \in Dom(\sigma)$ .
- L'application d'une **substitution** à un terme est l'**extension** de  $\sigma$  aux termes donnée par  $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$ .

## Composition de deux substitutions

---

Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux substitutions. La **composition** de  $\sigma$  avec  $\tau$  est donnée par  $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$ .

**Exemple :** Soit  $\sigma = \{x/f(y), w/g(z, z)\}$  et  $\tau = \{y/f(a), z/g(x, b)\}$ . La substitution  $\tau \circ \sigma$  est donnée par  $\{x/f(f(a)), y/f(a), w/g(g(x, b), g(x, b)), z/g(x, b)\}$  et la substitution  $\sigma \circ \tau$  est donnée par  $\{y/f(a), z/g(f(y), b), x/f(y), w/g(z, z)\}$ .

## Les unificateurs

---

### Définition :

- Un **problème d'unification** est un ensemble de paires de termes de la forme  $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$ .
- Un **unificateur** d'un problème  $\mathcal{P}$  est une substitution  $\sigma$  t.q.  $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$  pour toute équation  $s_i \doteq t_i$  dans  $\mathcal{P}$ .
- Un problème  $\mathcal{P}$  est **unifiable** s'il existe un unificateur de  $\mathcal{P}$ .
- Un **unificateur principal** de  $\mathcal{P}$  est un unificateur  $\sigma \in \mathcal{P}$  t.q. pour tout autre unificateur  $\tau$  de  $\mathcal{P}$  il existe une substitution  $\gamma$  t.q.  $\tau = \gamma \circ \sigma$ .
- L'**ensemble de variables** de  $\mathcal{P}$  est notée  $Var(\mathcal{P})$ .
- L'**application d'une substitution**  $\sigma$  à  $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$  est le problème  $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \dots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$ .

## Les conventions

---

1. On identifie deux unificateurs  $\sigma$  et  $\sigma'$  qui ne diffèrent que par des renommage de variables. Formellement,

$$\sigma \sim \sigma' \text{ ssi } \exists \text{ deux renommages } \rho, \rho' \text{ t.q. } \sigma = \rho \circ \sigma' \text{ et } \sigma' = \rho' \circ \sigma$$

2. On considère uniquement comme unificateurs de  $\mathcal{P}$  les substitutions  $\sigma$  t.q.  $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$ .

En conséquence, l'unificateur principal d'un problème  $\mathcal{P}$  est unique modulo renommage, c'est à dire :

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux unificateurs principaux de  $\mathcal{P}$ , alors  $\sigma \sim \sigma'$ .

## Les formes résolues

---

**Définition :** Un problème d'unification  $\mathcal{P}$  est en **forme résolue** ssi il est de la forme  $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$ , où

1. toutes les variables  $x_i$  sont distinctes ( $i \neq j$  implique  $x_i \neq x_j$ )
2. aucune  $x_i$  n'apparaît dans un  $t_i$  ( $x_i \notin VI(t_i)$ )

**Définition :** Soit  $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$  la forme résolue d'un problème  $\mathcal{P}$ . L'unificateur associé à  $\mathcal{P}$  est la substitution  $\vec{\mathcal{P}} = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ .

## Les règles de transformation

---

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad (\text{effacer}) \quad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad (\text{orienter})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}} \quad (\text{décomposer})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in \text{Var}(\mathcal{P}) \quad x \notin \text{VI}(s)}{\mathcal{P}\{x/s\} \cup \{x \doteq s\}} \quad (\text{remplacer})$$

## Algorithme d'unification d'un problème $\mathcal{P}$

---

1. On démarre avec un problème  $\mathcal{P}$
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème  $\mathcal{S}$
3. Si le problème  $\mathcal{S}$  est en forme résolue
  - alors renvoyer  $\vec{\mathcal{S}}$
  - sinon échec

## Correction et complétude de l'algorithme

---

### Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si  $\sigma$  est un unificateur d'une forme résolue  $\mathcal{P}$ , alors  $\sigma = \sigma\vec{\mathcal{P}}$ .
3. Si une règle transforme un problème  $\mathcal{P}$  dans un problème  $\mathcal{S}$ , alors les unificateur de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  sont les mêmes.

**Théorème : (Correction)** Si l'algorithme trouve une substitution  $\vec{\mathcal{S}}$  pour le problème  $\mathcal{P}$ , alors  $\vec{\mathcal{S}}$  est un unificateur principal de  $\mathcal{P}$ .

**Théorème : (Complétude)** Si le problème  $\mathcal{P}$  est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de  $\mathcal{P}$ .