Calcul du Polynôme Chromatique

P. Berthomé S. Lebresne K. Nguyễn

22 Juin 2005

Once upon a time ...
in a galaxy far, far away

Plan

Le polynôme chromatique : sa vie, son œuvre

Definition ($k-$coloration)

Une $k-$coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $\varphi : V \rightarrow k$, tel que $\forall (u, v) \in E, \ \varphi(u) \neq \varphi(v)$.

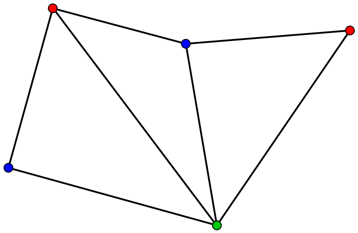
Example

Le polynôme chromatique : sa vie, son œuvre

Definition ($k-$coloration)

Une $k-$coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $\varphi : V \rightarrow k$, tel que $\forall (u, v) \in E,\ \varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Example



Le polynôme chromatique : sa vie, son œuvre

Definition (polynôme chromatique)

Pour un graphe G donné, on définit :

$$P_G(x) = \#\{x\text{-coloration de } G\}$$

Example

1. graphe vide à n sommets : x^n
2. graphe complet à n sommets : $\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$

Le polynôme chromatique : sa vie, son œuvre

Definition (polynôme chromatique)

Pour un graphe G donné, on définit :

$$P_G(x) = \#\{x\text{-coloration de } G\}$$

Example

1. graphe vide à n sommets : x^n
2. graphe complet à n sommets : $\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$

Le polynôme chromatique : sa vie, son œuvre

Definition (polynôme chromatique)

Pour un graphe G donné, on définit :

$$P_G(x) = \#\{x\text{-coloration de } G\}$$

Example

1. graphe vide à n sommets : x^n
2. graphe complet à n sommets : $\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$

Quelques propriétés « sexy »

- Le degré du polynôme est $|V|$.
- $a_0 = 0$
- $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ (ou alors, le graphe est vide)
- Tous les arbres à n sommets ont même polynôme chromatique : $x\,(x-1)^{n-1}$

Quelques propriétés « sexy »

- Le degré du polynôme est $|V|$.
- $a_0 = 0$
- $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ (ou alors, le graphe est vide)
- Tous les arbres à n sommets ont même polynôme chromatique : $x\,(x-1)^{n-1}$

Quelques propriétés « sexy »

- Le degré du polynôme est $|V|$.
- $a_0 = 0$
- $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ (ou alors, le graphe est vide)
- Tous les arbres à n sommets ont même polynôme chromatique : $x\,(x-1)^{n-1}$

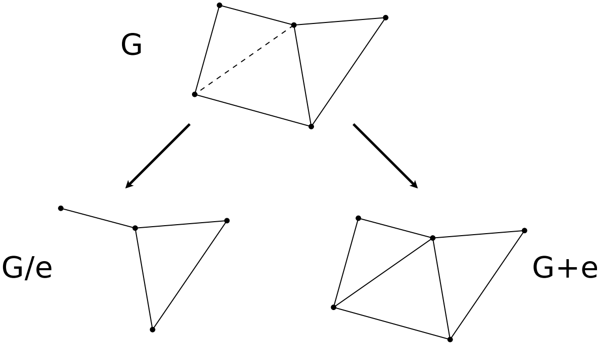
Quelques propriétés « sexy »

- Le degré du polynôme est $|V|$.
- $a_0 = 0$
- $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ (ou alors, le graphe est vide)
- Tous les arbres à n sommets ont même polynôme chromatique : $x\,(x-1)^{n-1}$

La justification de la mort qui tue tout

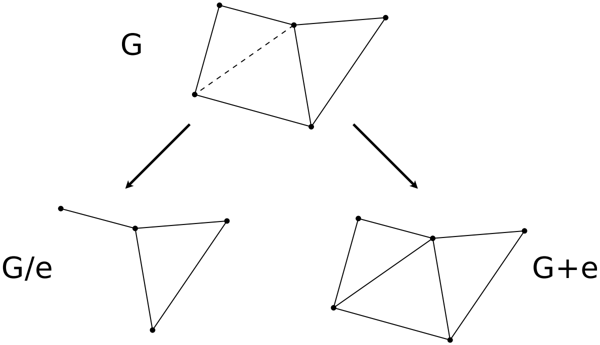
Le polynôme chromatique est utilisé par les physiciens, car fortement lié a la fonction de répartition des températures nulles des états-q du modèle ferromagnétique de Potts.

Algorithme de Brooks



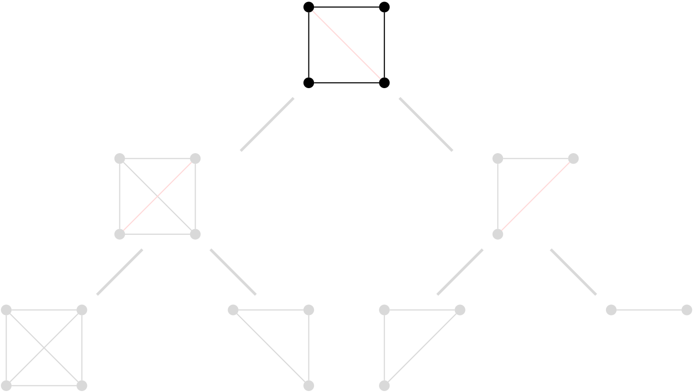
$$P_G(x) = P_{G/e}(x) + P_{G+e}(x)$$

Algorithme de Brooks



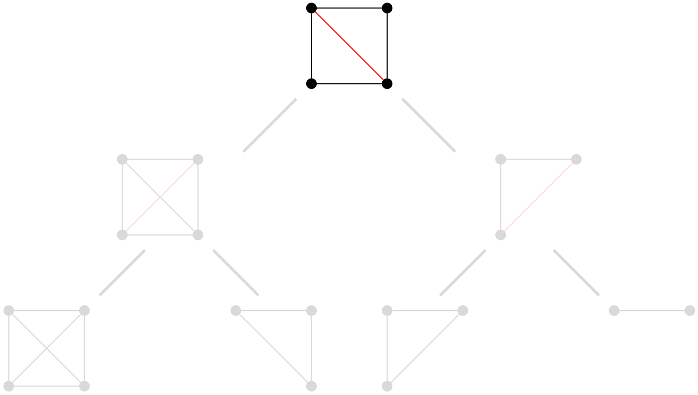
$$P_G(x) = P_{G/e}(x) + P_{G+e}(x)$$

Exemple : C_4



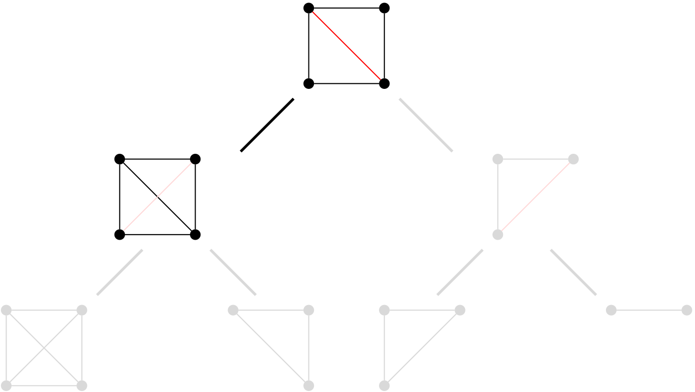
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



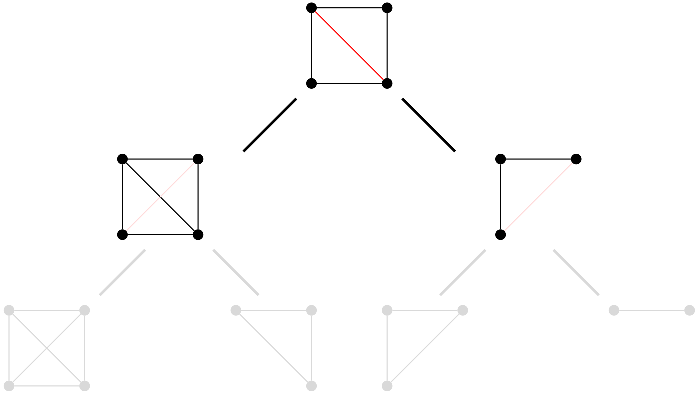
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



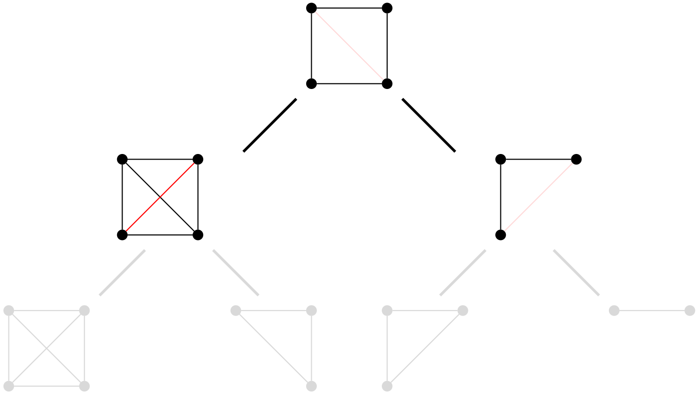
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



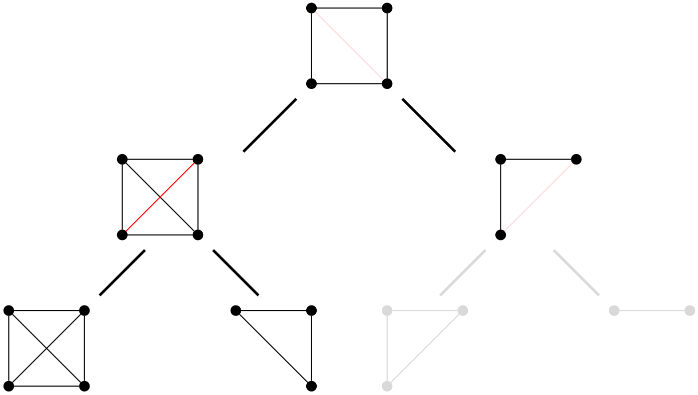
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



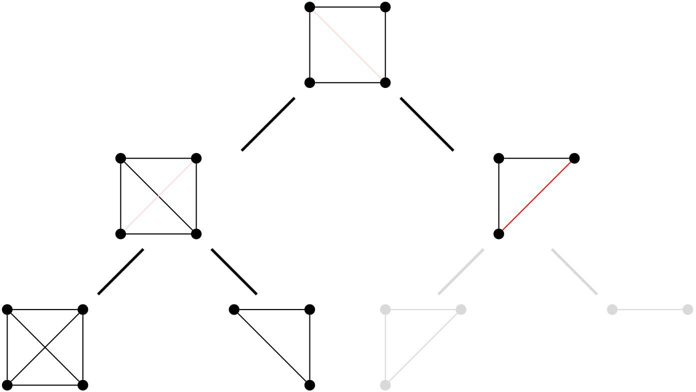
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



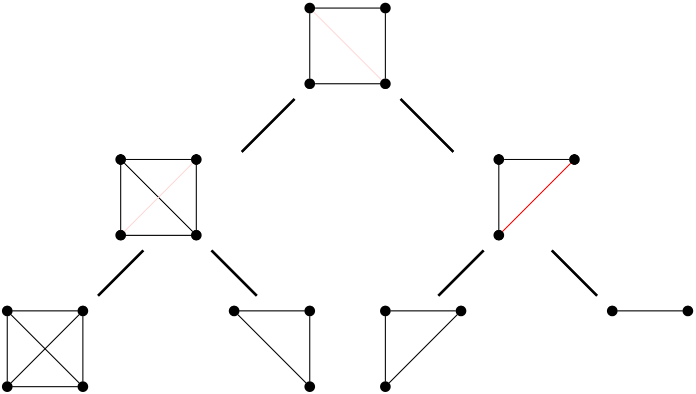
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



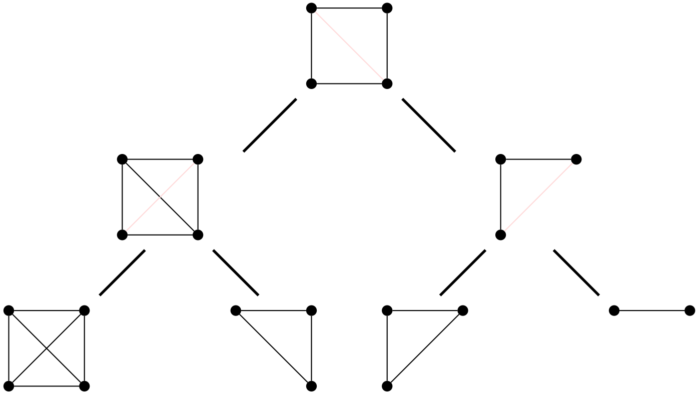
$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Exemple : C_4



$$P_{C_4}(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

Remarques

- Puisque l'on itère la décomposition sur toutes les arêtes non présentes, le cas de base est toujours un graphe complet (dont on sait determiner le polynôme chromatique).
- Cela justifie que l'objet dont on parle est bien un polynôme.
- Complexité catastrophique hormis sur des graphes presque complets (même sur des graphes simples comme par exemple les cycles).

Remarques

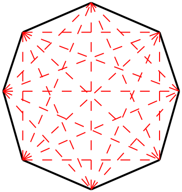
- Puisque l'on itère la décomposition sur toutes les arêtes non présentes, le cas de base est toujours un graphe complet (dont on sait determiner le polynôme chromatique).
- Cela justifie que l'objet dont on parle est bien un polynôme.
- Complexité catastrophique hormis sur des graphes presque complets (même sur des graphes simples comme par exemple les cycles).

Remarques

- Puisque l'on itère la décomposition sur toutes les arêtes non présentes, le cas de base est toujours un graphe complet (dont on sait determiner le polynôme chromatique).
- Cela justifie que l'objet dont on parle est bien un polynôme.
- Complexité catastrophique hormis sur des graphes presque complets (même sur des graphes simples comme par exemple les cycles).

Remarques

- Puisque l'on itère la décomposition sur toutes les arêtes non présentes, le cas de base est toujours un graphe complet (dont on sait determiner le polynôme chromatique).
- Cela justifie que l'objet dont on parle est bien un polynôme.
- Complexité catastrophique hormis sur des graphes presque complets (même sur des graphes simples comme par exemple les cycles).



Plan

L'idée

Puisque l'algorithme est exponentiel en le nombre d'arêtes à rajouter, ajoutons moins d'arêtes !

Graphe triangulé

Definition

Un graphe connexe est triangulé si tout cycle de longeur au moins 4 contient une corde (2 sommets non consécutif dans le cycle sont adjacents).

Example

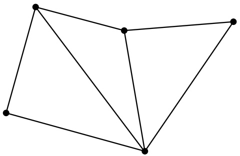
triangulé ☺ pas triangulé ☹

Graphe triangulé

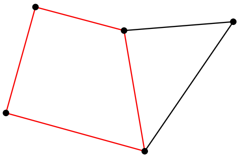
Definition

Un graphe connexe est triangulé si tout cycle de longeur au moins 4 contient une corde (2 sommets non consécutif dans le cycle sont adjacents).

Example



triangulé ☺



pas triangulé ☹

Arbre de cliques

Definition

Si $G = (V, E)$ est un graphe triangulé, un arbre de cliques de G est un arbre $T = (C, F)$ tel que :

1. C est l'ensemble des cliques maximales de G.
2. $\forall v \in V$, l'ensemble des sommets de C contenant v est un sous-arbre de T.

Example

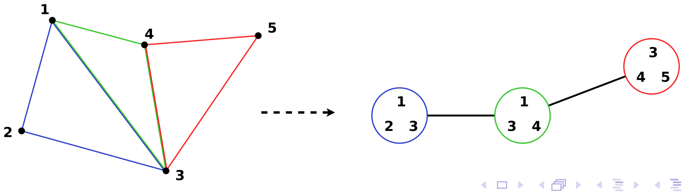
Arbre de cliques

Definition

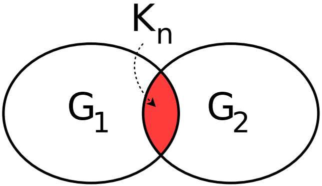
Si $G = (V, E)$ est un graphe triangulé, un arbre de cliques de G est un arbre $T = (C, F)$ tel que :

1. C est l'ensemble des cliques maximales de G.
2. $\forall v \in V$, l'ensemble des sommets de C contenant v est un sous-arbre de T.

Example



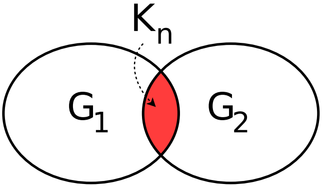
Petit Lemme utilitaire



Lemma (lemme de separation)

$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x) * P_{G_2}(x)}{P_{K_r}(x)}$$

Petit Lemme utilitaire



Lemma (lemme de separation)

$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x) * P_{G_2}(x)}{P_{K_r}(x)}$$

Graphe triangulé et leur polynôme chromatique

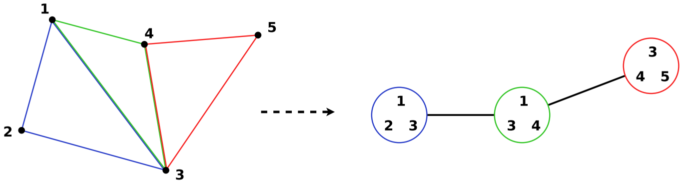
Si $G = (V, E)$ est un graphe triangulé, on montre trivialement, par induction sur un arbre de clique $T = (C, F)$ de G que

$$P_G(x) = \frac{\prod_{c \in C} P_{K_{|c|}}(x)}{\prod_{(u,v) \in F} P_{K_{|u \cap v|}}(x)}$$

Graphe triangulé et leur polynôme chromatique

Si $G = (V, E)$ est un graphe triangulé, on montre trivialement, par induction sur un arbre de clique $T = (C, F)$ de G que

$$P_G(x) = \frac{\prod_{c \in C} P_{K_{|c|}}(x)}{\prod_{(u,v) \in F} P_{K_{|u \cap v|}}(x)}$$



Nouvel algorithme

1. Calculer l'ensemble d'arêtes à ajouter au graphe pour le trianguler.
2. Itérer l'algorithme de Brooks pour rajouter ces arêtes.
3. L'ensemble des graphes obtenus sont triangulés ; calculer leurs arbres de cliques et en déduire leurs polynômes chromatiques.

Nouvel algorithme

1. Calculer l'ensemble d'arêtes à ajouter au graphe pour le trianguler.
2. Itérer l'algorithme de Brooks pour rajouter ces arêtes.
3. L'ensemble des graphes obtenus sont triangulés ; calculer leurs arbres de cliques et en déduire leurs polynômes chromatiques.

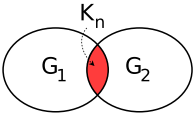
Nouvel algorithme

1. Calculer l'ensemble d'arêtes à ajouter au graphe pour le trianguler.
2. Itérer l'algorithme de Brooks pour rajouter ces arêtes.
3. L'ensemble des graphes obtenus sont triangulés ; calculer leurs arbres de cliques et en déduire leurs polynômes chromatiques.

Plan

Un lemme décidement bien utile

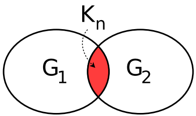
- On dispose du lemme de séparation. Intuitivement, on aimerait l'utiliser pour avoir un algorithme dans l'« esprit » d'un « Divide and Conquer ».



- Problème : Quelles arêtes ajouter pour « bien » séparer et quand séparer ?
- Solution : Utiliser l'abre de cliques.

Un lemme décidement bien utile

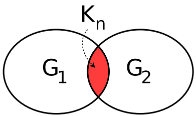
- On dispose du lemme de séparation. Intuitivement, on aimerait l'utiliser pour avoir un algorithme dans l'« esprit » d'un « Divide and Conquer ».



- Problème : Quelles arêtes ajouter pour « bien » séparer et quand séparer ?
- Solution : Utiliser l'abre de cliques.

Un lemme décidement bien utile

- On dispose du lemme de séparation. Intuitivement, on aimerait l'utiliser pour avoir un algorithme dans l'« esprit » d'un « Divide and Conquer ».



- Problème : Quelles arêtes ajouter pour « bien » séparer et quand séparer ?
- Solution : Utiliser l'abre de cliques.

Pre-arbre de cliques

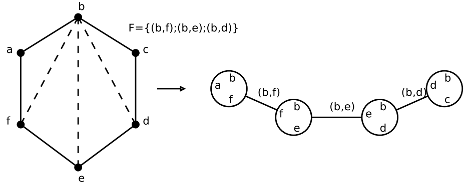
G graphe quelconque et F ens. d'arêtes tels que $G + F$ triangulé.
$T = (T', \phi)$ est un pre-arbre de cliques de G pour F si :

1. $T' = (C, E)$ est un arbre de cliques de $G + F$
2. $\phi : E \rightarrow \mathcal{P}(F)$ nous donne pour chaque arête (u, v) de E, l'ensemble des arêtes de F dans $u \cap v$
   Remarque (importante) : si $\phi((u, v)) = \emptyset$ alors $u \cap v$ est une clique séparatrice de G.

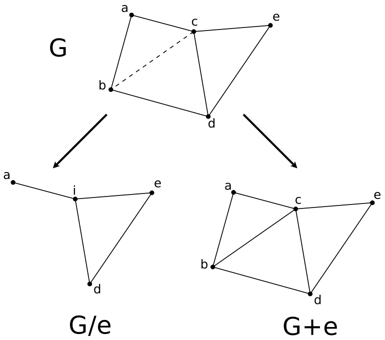
Pre-arbre de cliques

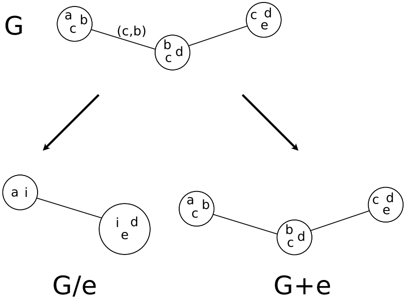
G graphe quelconque et F ens. d'arêtes tels que $G + F$ triangulé.
$T = (T', \phi)$ est un pre-arbre de cliques de G pour F si :

1. $T' = (C, E)$ est un arbre de cliques de $G + F$
2. $\phi : E \rightarrow \mathcal{P}(F)$ nous donne pour chaque arête (u, v) de E, l'ensemble des arêtes de F dans $u \cap v$
   Remarque (importante) : si $\phi((u, v)) = \emptyset$ alors $u \cap v$ est une clique séparatrice de G.



Evolution du pre-arbre de clique



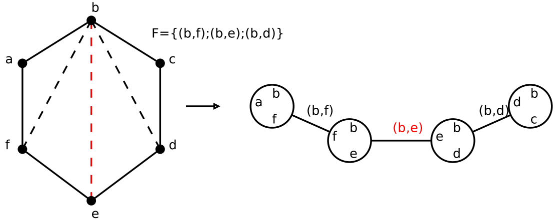


Choix des arêtes à ajouter

- On va utiliser l'algorithme de Brooks pour ajouter toutes les arêtes de $\phi(e)$ pour une arête $e \in E$.
- On choisit l'arête e à « saturer » qui donnera, après séparation, la meilleure répartition des arêtes à rajouter (c'est une stratégie et elle n'est pas optimale).

Choix des arêtes à ajouter

- On va utiliser l'algorithme de Brooks pour ajouter toutes les arêtes de $\phi(e)$ pour une arête $e \in E$.
- On choisit l'arête e à « saturer » qui donnera, après séparation, la meilleure répartition des arêtes à rajouter (c'est une stratégie et elle n'est pas optimale).



Algorithme final

A tout moment, on garde G le graphe, F l'ens. d'arêtes qui le triangule, et $T = (C, E)$ un pre-arbre de cliques de G pour F.

1. Si G est triangulé, on utilise sait faire.
2. Si $\exists e \in E, \phi(e) = \emptyset$,
   - On sépare G.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 graphes obtenus.
3. Sinon,
   - On choisit une arête de G qui « sature » la « bonne » arête du pre-arbre de cliques.
   - On ajoute/contracte l'arête choisie.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 évolutions du graphe obtenu.

Algorithme final

A tout moment, on garde G le graphe, F l'ens. d'arêtes qui le triangule, et $T = (C, E)$ un pre-arbre de cliques de G pour F.

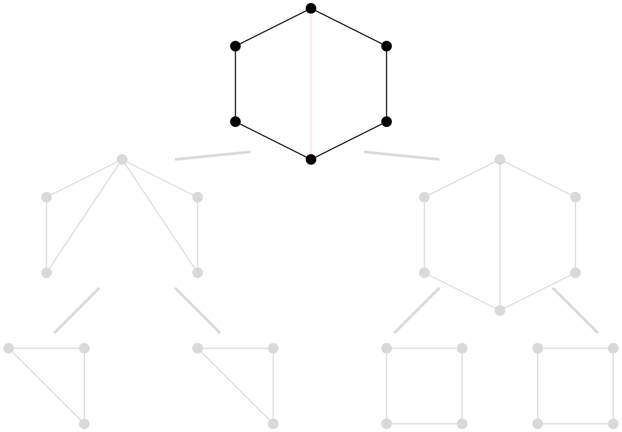
1. Si G est triangulé, on utilise sait faire.
2. Si $\exists e \in E, \phi(e) = \emptyset$,
   - On sépare G.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 graphes obtenus.
3. Sinon,
   - On choisit une arête de G qui « sature » la « bonne » arête du pre-arbre de cliques.
   - On ajoute/contracte l'arête choisie.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 évolutions du graphe obtenu.

Algorithme final

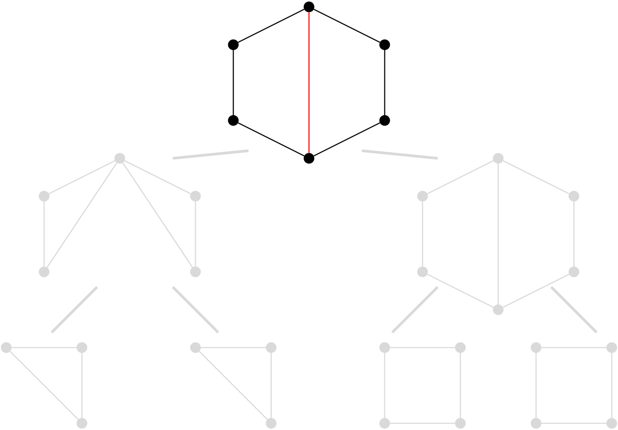
A tout moment, on garde G le graphe, F l'ens. d'arêtes qui le triangule, et $T = (C, E)$ un pre-arbre de cliques de G pour F.

1. Si G est triangulé, on utilise sait faire.
2. Si $\exists e \in E, \phi(e) = \emptyset$,
   - On sépare G.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 graphes obtenus.
3. Sinon,
   - On choisit une arête de G qui « sature » la « bonne » arête du pre-arbre de cliques.
   - On ajoute/contracte l'arête choisie.
   - On s'appelle récursivement sur les 2 évolutions du graphe obtenu.

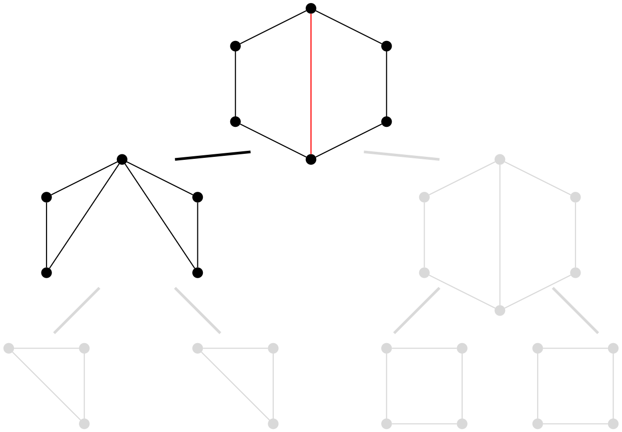
Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



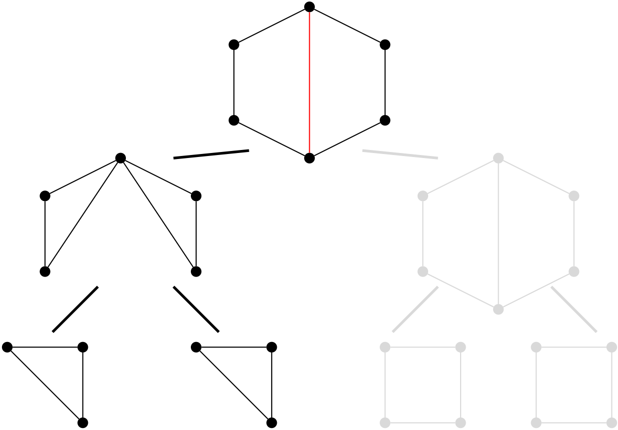
Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



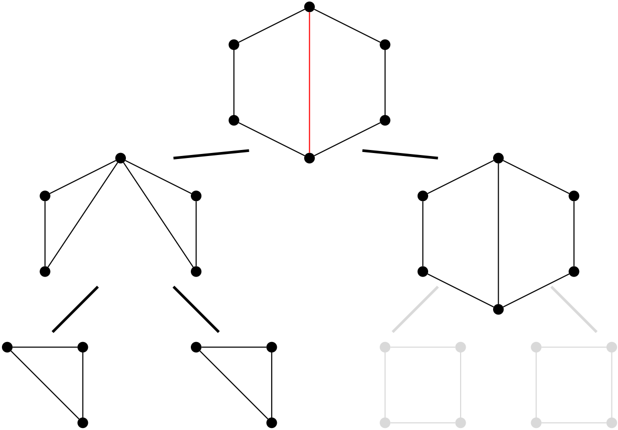
Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



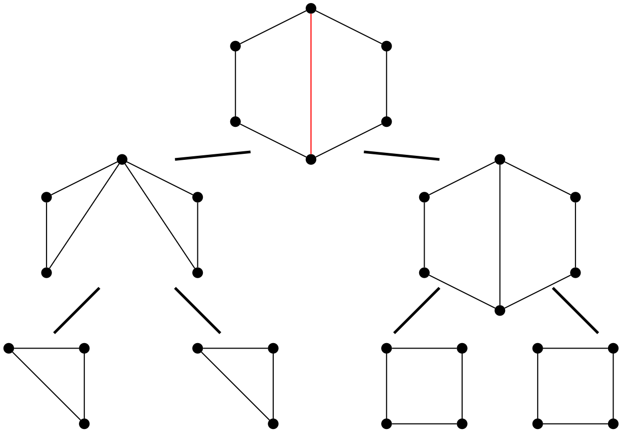
Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



Car un bon exemple vaut mieux qu'une longue explication



Plan

Quelques mots de complexité

- Algorithme de base : $O(2^n)$ *où n est le nombre d'arêtes à ajouter pour compléter le graphe*
  $\Rightarrow$ Pour C_{10}, $n = 35$, de l'ordre de $2^{35} = 34\,359\,738\,368$ graphes à calculer.
- Première amélioration : $O(2^k)$ *où k est le nombre d'arêtes à ajouter pour trianguler le graphe*
  $\Rightarrow$ Pour C_{10}, $k = 7$ de l'ordre de $2^7 = 128$ graphes à calculer.
- Algorithme final : $O(2^i) + max(...)$... *où i est le nombre d'arêtes à ajouter pour saturer la 1ère arête du pre-arbre de clique*
  $\Rightarrow$ Pour C_{10}, 14 graphes à calculer.

That's all folks

DES QUESTIONS ?

(mais rappelez-vous, vous avez faim !)