

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 1

Déduction naturelle

Exercice 1 – Équivalences remarquables Établir en déduction naturelle intuitionniste les équivalences suivantes :

1. Réflexivité, transitivité de l'implication :

$$A \Rightarrow A \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

2. Isomorphisme de Curry :

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

3. Associativité, commutativité :

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) & A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A \\ (A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C) & A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A \end{aligned}$$

4. Propriétés des unités :

$$\begin{aligned} A \wedge \top &\Leftrightarrow A & A \wedge \perp &\Leftrightarrow \perp \\ A \vee \perp &\Leftrightarrow A & A \vee \top &\Leftrightarrow \top \end{aligned}$$

5. Distributivités \vee/\wedge :

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

6. Distributivités avec les quantificateurs :

$$\begin{aligned} \forall x (A \wedge B) &\Leftrightarrow (\forall x A) \wedge (\forall x B) \\ \exists x (A \vee B) &\Leftrightarrow (\exists x A) \vee (\exists x B) \end{aligned}$$

7. Distributivité de \wedge et \vee avec l'implication :

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \\ (A \vee B) \Rightarrow C &\Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \end{aligned}$$

Exercice 2 – Échange de quantificateurs Soit A une formule quelconque.

1. Montrer les équivalences $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$ et $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$.
2. Montrer l'implication : $\exists y \forall x A \Rightarrow \forall x \exists y A$.
Pourquoi ne peut-on pas prouver l'implication réciproque ?

Exercice 3 – Caractérisation des connecteurs Au langage du calcul des prédicats du premier ordre, on ajoute un nouveau connecteur binaire $A \heartsuit B$, muni des règles d'introduction et d'élimination suivantes

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \heartsuit B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \heartsuit B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \heartsuit B}{\Gamma \vdash B}$$

calquées sur les règles du connecteur \wedge .

1. Démontrer l'équivalence $\vdash (A \heartsuit B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ dans ce système. Que peut-on en conclure ?
2. Refaire le même exercice en introduisant successivement des connecteurs \diamond et \clubsuit dont les règles sont calquées respectivement sur les règles des connecteurs \vee et \Rightarrow , puis montrer les équivalences $(A \diamond B) \Leftrightarrow (A \vee B)$ et $(A \clubsuit B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. On pourra également jouer au même jeu avec les unités \top et \perp et les quantificateurs \forall et \exists .

Exercice 4 – Lois classiques Montrer en déduction naturelle les formules suivantes. Pour chaque équivalence, préciser quelle implication est intuitionniste ou classique :

1. Double négation : $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
2. Tiers exclus : $A \vee \neg A$
3. Lois de Morgan :

$$\begin{array}{ll} \neg\top \Leftrightarrow \perp & \neg\perp \Leftrightarrow \top \\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B) & \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B) \\ \neg(\forall x A) \Leftrightarrow \exists x (\neg A) & \neg(\exists x A) \Leftrightarrow \forall x (\neg A) \end{array}$$

4. Décomposition de l'implication :

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B \qquad \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

5. Loi de Peirce : $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Exercice 5 – Induction sur les dérivations

1. Énoncer précisément le schéma de raisonnement par récurrence sur la structure des dérivations en déduction naturelle.
2. À l'aide de ce schéma, montrer le lemme d'affaiblissement

$$\text{Si } \Gamma \vdash A \text{ et } \Gamma \subset \Gamma', \text{ alors } \Gamma' \vdash A.$$

et rédiger au propre sa démonstration, en mettant clairement en évidence l'hypothèse de récurrence utilisée.