

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 6

Théories et modèles

Exercice 1 (Indépendance-1) Soit $p(_, _)$ un symbole de prédicat d'arité 2. On considère les formules

$$\begin{aligned} R &\equiv \forall x p(x, x) \\ S &\equiv \forall x \forall y [p(x, y) \Rightarrow p(y, x)] \\ T &\equiv \forall x \forall y \forall z [p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)] \end{aligned}$$

Montrer que les formules R , S et T sont indépendantes, en ce sens qu'aucun des trois séquents $S, T \vdash R$, $R, T \vdash S$ et $R, S \vdash T$ n'est dérivable.

Exercice 2 (Extrait de l'examen de juin 2004)

On considère la théorie \mathcal{T} (du premier ordre) dont la signature est formée par

- deux symboles de constante 0 et 1,
- un symbole de prédicat $<$ d'arité 2,

et dont les axiomes sont :

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & 0 < 1 \\ (A_2) \quad & \forall x \neg(x < x) \\ (A_3) \quad & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z) \\ (A_4) \quad & \forall x \forall y [x < y \Rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)] \end{aligned}$$

1. Donner un modèle de \mathcal{T} . En déduire que \mathcal{T} est cohérente.
2. Montrer que tout modèle de \mathcal{T} est infini.
3. Montrer que pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} - A_i$ (« \mathcal{T} privée de l'axiome A_i ») admet en revanche un modèle fini. On exhibera un tel modèle pour chaque valeur de i .

Exercice 3 (Indépendance-2) Soit la signature formée par le symbole de constante 0, le symbole de fonction unaire s et le symbole de prédicat binaire $=$. Dans la théorie égalitaire induite par cette signature, montrer l'indépendance des axiomes de Peano :

- $\forall x \forall y [s(x) = s(y) \Rightarrow x = y]$
- $\forall x \forall y \neg[s(x) = 0]$
- $\forall x_1 \dots \forall x_n [A\{x := 0\} \wedge \forall x (A \Rightarrow A\{x := s(x)\}) \Rightarrow \forall x A]$
pour toute formule A telle que $FV(A) \subset \{x_1; \dots; x_n; x\}$

(Le principe de récurrence n'est pas réellement un axiome, mais un schéma d'axiomes.)

Exercice 4 (Théories égalitaires) Soit \mathcal{T} une théorie égalitaire. On dit qu'un modèle \mathcal{M} de \mathcal{T} est égalitaire lorsque le prédicat binaire d'égalité $=$ est interprété par la relation d'égalité dans le modèle, c'est-à-dire : $\llbracket t = u \rrbracket_\rho^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket t \rrbracket_\rho^{\mathcal{M}} = \llbracket u \rrbracket_\rho^{\mathcal{M}}$ (pour toute valuation ρ sur \mathcal{M}).

Montrer que tout modèle \mathcal{M} d'une théorie égalitaire \mathcal{T} peut être transformé en un modèle égalitaire \mathcal{M}' de \mathcal{T} . (On justifiera les différentes étapes de la construction de \mathcal{M}' .)

Exercice 5 (Isomorphisme de modèles) Soit Σ une signature.

1. Définir une notion d'isomorphisme entre deux Σ -modèles \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .
2. En déduire que si \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux Σ -modèles isomorphes, alors pour toute formule close A , on a $\mathcal{M}_1 \models A$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \models A$.

Exercice 6 (Modèles standard de l'arithmétique) À tout modèle égalitaire¹ \mathcal{M} de l'arithmétique, on associe naturellement une application $\phi^{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par

$$\phi^{\mathcal{M}}(n) = \underbrace{\llbracket s(\dots s(0) \dots) \rrbracket^{\mathcal{M}}}_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\phi^{\mathcal{M}}$ est injective. Est-elle nécessairement surjective ?

On dit d'un modèle \mathcal{M} de l'arithmétique qu'il est *standard* lorsque $\phi^{\mathcal{M}}$ est bijective.

2. Montrer que tous les modèles standard de l'arithmétique sont isomorphes.

Exercice 7 (Arithmétique non-standard) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{T}_n l'extension de l'arithmétique obtenue en introduisant :

- Un nouveau symbole de constante ω ;
- Les n axiomes $\neg[\omega = 0], \neg[\omega = s(0)], \dots, \neg[\omega = \underbrace{s(\dots s(0) \dots)}_{n-1}]$

Enfin, on note \mathcal{T}_ω la théorie limite, obtenue en réunissant les axiomes des théories \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que chacune des théories \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{N}$) est cohérente.
2. Peut-on en déduire que \mathcal{T}_ω est cohérente ? Pourquoi ?
3. Déduire des deux questions précédentes que l'arithmétique admet un modèle non standard.

Précision : Dans cet exercice, on présuppose la cohérence de l'arithmétique.

1. On ne s'intéresse ici qu'aux modèles égalitaires de l'arithmétique.