La raisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences expérimentales

Alexandre Miquel

Preuves, Programmes & Systèmes

`Alexandre.Miquel@pps.jussieu.fr`

Fête de la Science 2007

Université Paris Diderot – UFR d'informatique

L'utilisation des mathématiques...

- Dans les sciences expérimentales

  physique, chimie, informatique, biologie, économie, finance, etc.

- Dans la vie de tous les jours (technologie)

  ordinateur, téléphone mobile, GPS, automobile, etc.

Deux méthodologies très différentes :

Sciences expérimentales	**Mathématiques**
Méthode empirique, “inductive”	Méthode axiomatique, déductive
Recherche des causes (“lois”)	Les axiomes sont donnés
Accord avec l'expérience	Correction formelle

Peut-on vraiment marier les deux approches ? Comment ?

Le point de vue de Sirius (métaphore)

Abstraction

Application

Modélisation

Interprétation

. . . . ? . . . . >

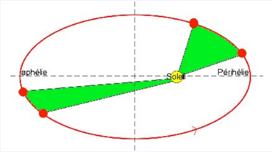
La petite musique des ellipses célestes

Les 2 principes de la mécanique de Newton

1. $$\vec{F} \;=\; m\,\vec{a}$$ (Principe fondamental de la dynamique)
2. $$\|\vec{F}\| \;=\; G\,\frac{m\,m'}{d^2}$$ (Loi de la gravitation universelle)

... impliquent mathématiquement ...

Les 3 lois de Kepler (trajectoire des corps en orbite)



1. Trajectoire elliptique (centre : 1 des 2 foyers)
2. Vitesse aréolaire constante
3. $$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand-axe})^3} \;=\; \text{constante}$$

La soupe mathématique (quelques ingrédients)

- $\vec{a} = (-GM/r^2)\cdot\vec{u}_r$ avec $\vec{r} = r\cdot\vec{u}_r$ (Force centrale)
- $\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = (\vec{v}\wedge\vec{v}) + (\vec{r}\wedge\vec{a}) = \vec{0}$ (Mouvement planaire)
- $\vec{u}_r = \cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j} = e^{i\pi\theta}$ (Coordonnées polaires)
- $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, avec $p = L^2/GMm^2$ (Trajectoire elliptique)
- $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$, où $V(r) = -GMm/r$ (Force dérivée d'un potentiel)
- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$ où $U_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr}$
- $\Delta t = \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - U_{eff}(r))}}$ et $\Delta\theta = \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} \frac{C\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - U_{eff}(r))}}$

- La plupart des concepts mathématiques utilisés n'ont a priori aucun rapport avec le problème étudié
- Exemple du 18 siècle (math & phys.) — quid du 21e ?
  - Relativité générale $\rightsquigarrow$ espaces de Minkowski
  - Mécanique quantique $\rightsquigarrow$ espaces de Hilbert

La déraisonnable efficacité des maths ?

- Pas de rapport immédiat entre les concepts mathématiques utilisés et le phénomène modélisé

  Maths = Hors-sujet ?

- Les objets mathématiques abstraits n'ont souvent aucun équivalent dans le monde sensible

  Maths = Métaphysique ?

Eugene Wigner, 1960 :

The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences

1. Pourquoi les maths arrivent-elles à décrire le monde si efficacement ?
2. N'y a-t-il toujours qu'une seule théorie pour expliquer un ensemble de phénomènes ?

E. Wigner (1902–1995)

Qu'est-ce que les maths ?

"Les mathématiques peuvent êtres définies comme une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai."

– Bertrand Russell

"La geometrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses"

– René Descartes

On ne sait pas ce que sont les objets mathématiques...

... mais on sait comment calculer/raisonner avec ces objets

Point de vue formel : Les maths en tant que langage

- Raisonnement/calcul = manipulation de symboles

Le langage mathématique

"Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont, en soi, aucune importance particulière"

– David Hilbert

La grammaire des mathématiques

Des assemblages de symboles pour exprimer

- Des objets (termes)

$$\pi, \qquad \mathbb{R}, \qquad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad (x \mapsto \sin^2(x)/x), \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$$

- Des faits (formules)

$$2+2=4, \qquad (3 \notin \varnothing) \wedge (1000 \times \pi < 0), \qquad \forall x{\in}\mathbb{N}\ \exists y{\in}\mathbb{N}\ (x = 2y \vee x = 2y+1)$$

- Des raisonnements (preuves)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}$$

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas (années 1930)

- La correction formelle d'une preuve est une qualité objective

  Un objet (ordinateur) peut vérifier une preuve

  $\Rightarrow$ Démonstration assistée par ordinateur

- La vérité n'est pas calculable

- Tous les problèmes (math) n'ont pas forcément une solution

  Gödel 1931, Turing 1936

Cohérence des maths ?

$=$ correspondance entre l'égalité démontrée et l'égalité calculée

- La cohérence des mathématiques n'est pas démontrable

- La cohérence des mathématiques n'est pas certaine

  ... mais on peut la supposer comme une loi de la physique

Et ce qu'on a compris depuis... (années 1970)

Une ressemblance troublante...

Typage (informatique)

$$\frac{f : A \to B \qquad x : A}{f(x) : B}\ \text{Application}$$

Logique (mathématique)

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \text{Modus ponens}$$

Correspondance de Curry-Howard

Proposition (math)	$\equiv$	Type de données (informatique)
Démonstration	$\equiv$	Programme (fonction/donnée)
Règle de typage	$\equiv$	Règle de raisonnement
Élimination des coupures	$\equiv$	Calcul
Démontrer	$\equiv$	Construire un programme

Qu'est-ce qu'une science expérimentale ?

K. R. Popper :

La Logique de la découverte scientifique (1934)

K. R. Popper
(1902–1994)

Comment distinguer une théorique scientifique
d'une théorie qui ne l'est pas ? (= métaphysique)

1. Toute théorie scientifique n'est que conjecturale

   Le principe d'induction n'est pas logiquement valide

2. Mais une théorie scientifique peut être falsifiée

Critère de démarcation :

Théorie empirique = Théorie falsifiable

= Théorie donnée avec les instruments qui permettent de la falsifier

Remarques

- Le critère de démarcation **n'est pas** un critère de signification
- Les énoncés empiriques (universels) énoncent des interdictions

  Loi empirique (sciences) $\neq$ loi humaine (juridique)

- Une théorie est d'autant plus scientifique qu'elle...

  ... contient davantage d'énoncés empiriques
  ... énonce davantage d'interdictions
  ... est davantage susceptible d'être falsifiée
  ... est improbable
  ... est une théorie audacieuse !

- Scientificité $\neq$ Certitude

Processus de falsification indirecte

Soient deux théories falsifiables A et B telles que $A \Rightarrow B$ est prouvable mathématiquement

- En l'absence de certitude sur A, que peut-on dire sur B ?
- Mais si B est falsifiable expérimentalement...
  ... peut-on en déduire que A est falsifiée expérimentalement ?

Modus tollens expérimental

$$\frac{\text{math} \vdash A \Rightarrow B \qquad \text{exp} \models \neg B}{\text{exp} \models \neg A}$$

Ce principe est-il valide ? En quel sens ?

Le principe d'effectivité expérimentale

La correspondance de Curry-Howard permet de transformer toute preuve p de $A \Rightarrow B$

- en un programme $p' : A \to B$ qui transforme toute preuve de A en une preuve de B
- en un programme p^* qui transforme une falsification expérimentale de B en une falsification exp. de A

Théorème (Modus tollens expérimental)

À partir d'une preuve p de $A \Rightarrow B$ et d'une falsification expérimentale de B, on peut extraire un programme p^* dont l'exécution réalise un certain nombre de tests sur A et s'arrête en temps fini sur un test qui échoue.

Retour sur Sirius

Abstraction

Application

Modélisation

preuve formelle p

Interprétation

$<$ . . . .

Falsification indirecte

(Programme extrait p^*)

Les mathématiques dans les sciences expérimentales

La démarche scientifique

Une méthode pour confronter des théories avec des phénomènes

- La discussion critique (le « débat scientifique »)
- Une remise en question permanente
- Des énoncés précis et testables (falsifiables)

La méthode mathématique

Un moyen très puissant pour étendre l'ensemble des conséquences testables d'une théorie scientifique

- Indépendance vis à vis du problème traité (modularité)
- Des objets abstraits qui stimulent l'imagination
- Des raisonnements concrets capables de « rendre des comptes »