Problème n°2

extrait du partiel 2004

Exercice 1 (fonctions récursives). On dira que i *est un indice caractéristique* si i est l'indice d'une fonction récursive totale de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. Cette fonction est alors la fonction caractéristique d'un ensemble récursif A : $\varphi_i = \chi_A$. On dit que i *est un indice caractéristique de* A, et on note $C_i = A$. Les *indices récursivement énumérables de* A sont les indices de A en tant que récursivement énumérable, c'est à dire les entiers i tels que $A = W_i$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale f qui énumère des indices caractéristiques pour les ensembles récursifs, c'est à dire vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}\ [\varphi_{f(i)}(x) \downarrow \text{ et } \varphi_{f(i)}(x) \in \{0, 1\}] \ ;$$
$$\{C_{f(i)} \ / \ i \in \mathbb{N}\} = \{A \subset \mathbb{N} \ / \ A \text{ récursif}\} \ .$$

2. **a.** Montrer que l'on peut associer à toute fonction récursive partielle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive partielle $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$f'(x) \downarrow \text{ ssi } [f(x) \downarrow \text{ et } f(x) = 1].$$

b. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale α qui associe à un indice caractéristique d'un ensemble récursif un indice récursivement énumérable du même ensemble récursif :

$$\text{si } i \text{ est un indice caractéristique, alors } W_{\alpha(i)} = C_i \ .$$

3. **a.** Montrer que l'on peut associer à toute fonction récursive partielle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive $f'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est définie sur le plus grand segment initial I de $\mathbb{N}$ où f est définie, non définie ailleurs (en particulier si f est totale, f'' également), et telle que :

$$\text{si } x \in I \text{ et si } f(x) = 0, \text{ alors } f''(x) = 0 \ ;$$
$$\text{si } x \in I \text{ et si } f(x) > 0, \text{ alors } f''(x) = 1 \ .$$

b. Montrer qu'il existe une fonction β récursive totale telle que si $\varphi_i = f$ alors $\varphi_{\beta(i)} = f''$ définie à la question précédente.

4. Montrer que :

a. l'ensemble R des indices récursivement énumérables des sous-ensembles récursifs de $\mathbb{N}$ n'est pas récursif ;

On admet que R n'est pas récursivement énumérable (voir feuille 8).

b. il existe une fonction récursive totale ψ qui énumère des indices récursivement énumérables pour les ensembles récursifs :

$$\{W_{\psi(i)} \ / \ i \in \mathbb{N}\} = \{A \subset \mathbb{N} \ / \ A \text{ récursif}\} \ .$$

5. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive partielle f qui permette de passer des indices récursivement énumérables aux indices caractéristiques, c'est à dire telle que :

$$\text{si } W_i \text{ est récursif, alors } W_i = C_{f(i)} \ .$$