

# Une Approche Ludique de la Focalisation

Alexis Saurin  
PPS & INRIA  $\pi r^2$

*En collaboration avec M. Basaldella et K. Terui (RIMS, Japon)*

Séminaire du LABRI  
17 novembre 2009

# Introduction

- *But*: Utiliser les méthodes interactive de la Ludique pour étudier la Focalisation.
- *Motivation*: Analogie avec les résultats de compression de bande pour les machines de Turing.

## Plan

- *Focalisation et Logique Linéaire*;
- *Éléments de Ludique*;
- *Vision Ludique de la Focalisation*.

## Logique Linéaire & Ludique

- *Milieu 80's*. LL [Gir87]: dualités, analyse des règles structurelles
- *Début 90's*. Le concept de Polarité émerge de LC de Girard [Gir91] et de la Focalisation d'Andreoli [And92]
- *Fin 90's*. Projet moniste de Girard: dépasse la distinction traditionnelle entre syntax et sémantique [Gir99, Gir01]

À l'origine, LL était organisée selon 3 fragments principaux:

- Multiplicatifs ( $\otimes, \wp$ ): répartition des ressources;
- Additifs ( $\&, \oplus$ ): partage des ressources;
- Exponentiels ( $!, ?$ ): gestion des ressources.

La Focalisation d'Andreoli suggère une nouvelle répartition des connecteurs logiques:

- règles positives/négatives;
- $!, ?$ : à l'interface entre positifs and négatifs.

## Calcul des Séquents de LL

$$\frac{}{\vdash a, a^\perp} [ini] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} [cut]$$

$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} [1] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} [\otimes] \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} [\wp] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} [\perp]$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} [\oplus_i] \quad i \in \{1, 2\} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} [\&] \quad \frac{}{\vdash \Gamma, \top} [\top]$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, B}{\vdash ?\Gamma, !B} [!] \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, ?B} [?d] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?B} [?w] \quad \frac{\vdash \Gamma, ?B, ?B}{\vdash \Gamma, ?B} [?c]$$

## Calcul des Séquents de LL

$$\frac{}{\vdash a, a^\perp} [ini] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} [cut]$$

$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} [1] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} [\otimes] \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} [\wp] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} [\perp]$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} [\oplus_i] \quad i \in \{1, 2\} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} [\&] \quad \frac{}{\vdash \Gamma, \top} [\top]$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, B}{\vdash ?\Gamma, !B} [!] \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, ?B} [?d] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?B} [?w] \quad \frac{\vdash \Gamma, ?B, ?B}{\vdash \Gamma, ?B} [?c]$$

positif/négatif

## Calcul des Séquents de LL

$$\frac{}{\vdash a, a^\perp} [ini] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} [cut]$$

$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} [1] \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} [\otimes] \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} [\wp] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} [\perp]$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} [\oplus_i] \quad i \in \{1, 2\} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} [\&] \quad \frac{}{\vdash \Gamma, \top} [\top]$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, B}{\vdash ?\Gamma, !B} [!] \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, ?B} [?d] \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?B} [?w] \quad \frac{\vdash \Gamma, ?B, ?B}{\vdash \Gamma, ?B} [?c]$$

Logique et calcul:

positif/négatif

- Normalisation de preuve (élimination des coupures)
- Recherche de preuve (construction de preuve sans coupure)

## Focalisation en Logique Linéaire

- Les règles pour les connecteurs négatifs sont *réversible*: il n'y a pas de choix à faire, la prouvabilité de la conclusion entraîne la prouvabilité des prémisses.
- Les règles pour les connecteurs positifs *impliquent un choix*, résultant en de possibles erreurs lors de la recherche de preuve.
- Pourtant, les *connecteurs positifs* satisfont une propriété de *focalisation*: dans un séquent  $\vdash F_0, \dots, F_n$  ne contenant pas de formule négative, on peut choisir une formule  $F_i$  comme *foyer* sur lequel se concentre la recherche.

$\Gamma$ contient une formule négative	pas de formule négative dans $\Gamma$
choisir n'importe quelle formule négative (celle de gauche par ex.) et la décomposer en utilisant la seule règle négative possible	choisir une formule positive et la décomposer (avec ses ss-formules) héréditairement, jusqu'à atteindre des atomes ou ss-formules négatives

# Focalisation en Logique Linéaire

## Connecteurs Synthétiques et Écoulement du Temps Logique

- La Focalisation décrit précisément quels regroupement de connecteurs peuvent être formés de manière à obtenir un *connecteur synthétique*: il s'agit exactement des regroupements arbitraires de connecteurs de la même polarité:  $(A \otimes B) \oplus C$  peut être considéré, grâce à la focalisation comme un *connecteur ternaire*:  $(\_ \otimes \_) \oplus \_$ .
- En considérant toujours les clusters maximaux, on obtient un *calcul hyperséquentialisé* (pour MALL):
  - Connecteurs:  $\oplus_{i \in I} \otimes_{j \in J_i} N_i^j$  and  $\&_{i \in I} \wp_{j \in J_i} P_i^j$
  - Stricte *alternance de polarité*
- Le changement de polarité correspond à l'écoulement du *temps logique*: le temps passe lorsqu'on rencontre une nouvelle polarité. *Relié aux jeux et à l'alternance des coups des joueurs.*
- L'un des ingrédients de la Ludique.

## Un peu de Ludique

- Une approche *moniste*: pas de différence essentielle entre syntaxe et sémantique;
- Les objets de base sont les *desseins*, des abstractions de *preuves hyperséquentialisées*;
- *Théorie interactive* construite sur une notion d'*orthogonalité*;
- Une notion *interne* de complétude (qui ne fait référence ni à un langage, ni à un modèle, mais à la seule interaction);
- Résultats de complétude pour MALL;
- En combinant tout cela:

Une machine de Turing  $\mathbf{M}$  accepte un mot  $w$  ssi  $\mathbf{M}^* \perp w^*$ .

## Ludique – Dessains

Étant donnée une *signature*  $\mathcal{A} = (A, ar)$  ( $A$  un ensemble de *noms*  $a, b, c, \dots$ , et  $ar : A \rightarrow \mathbb{N}$  une *fonction d'arité*) et un ensemble dénombrable de variables  $\mathcal{V} = \{x, y, z, \dots\}$ , les actions propres sont définies comme suit:

- $\bar{a}$  est une *action positive* avec  $a \in A$ , et
- $a(x_1, \dots, x_n)$  est une *action négative* ( $x_1, \dots, x_n$  distincts)

### Définition (Dessains)

Les *desseins* sont générés *coinductivement* par la grammaire:

$$\begin{aligned} P &::= \Omega \mid \boxtimes \mid N_0 \bar{a} \langle N_1, \dots, N_n \rangle \\ N &::= x \mid \sum a(\vec{x}). P_a \end{aligned}$$

## Ludique – Dessins

$$\begin{array}{l} P ::= \Omega \text{ (div)} \mid \text{⌘} \text{ (dai)} \mid N_0 | \bar{a} \langle N_1, \dots, N_n \rangle \text{ (app)}, \\ N ::= x \text{ (var)} \mid \sum a(\vec{x}). P_a \text{ (abs)}, \end{array}$$

Dans une perspective calculatoire (ou selon une approche à la  $\lambda$ -calcul):

- $\Omega$  est la **divergence**
- $\text{⌘}$ , le **daimon**: il s'agit d'une **erreur** qui stope le calcul
- $N_0 | \bar{a} \langle N_1, \dots, N_n \rangle$  est une **application nommée à arité multiple**
- $x$  est une **variable**
- $\sum a(\vec{x}). P_a$  est une **superposition d'abstractions**

De plus (et contrairement au  $\lambda$ -calcul): **stricte alternance des polarités** et **concordance des arités**.

## Ludique – Dessains

Différentes sortes de desseins  $D$ :

- **total**: si  $D \neq \Omega$ ;
- **coupure**:  $D = (\sum a(\vec{x}).P_a)|\bar{a}\langle N_1, \dots, N_n \rangle$ ;
- **identité**:  $D = x$ ;
- **linéaire**: pour tout sous dessein de la forme  $N_0|\bar{a}\langle N_1, \dots, N_n \rangle$ , les ensembles  $\text{fv}(N_0), \dots, \text{fv}(N_n)$  sont deux à deux disjoints (ou *affine*);
- un dessein positif  $P$  est **clos** si  $\text{fv}(P) = \emptyset$ , **atomique** si  $\text{fv}(P) \subseteq \{x_0\}$  pour une certaine variable  $x_0$  fixée;
- un dessein négatif  $N$  est **atomique** si  $\text{fv}(N) = \emptyset$ .

## Ludique – Normalisation

### Réduction de Coupure:

$$\left(\sum a(x_1, \dots, x_n) \cdot P_a\right) | \bar{a} \langle N_1, \dots, N_n \rangle \longrightarrow P_a[N_1/x_1, \dots, N_n/x_n].$$

Étant donnés deux desseins positifs  $P, Q$ , on note:

- $P \Downarrow Q$  si  $P \longrightarrow^* Q$  et  $Q$  n'est ni une coupure ni  $\Omega$ .
- $P \Uparrow$  s'il n'y a aucun  $Q$  tel que  $P \Downarrow Q$ .

*Fonction de Normalisation*, définie par corécursion comme:

$$\begin{array}{l} \llbracket P \rrbracket = \text{⌘} \quad \text{if } P \Downarrow \text{⌘} \\ \llbracket P \rrbracket = x | \bar{a} \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket \rangle \quad \text{si } P \Downarrow x | \bar{a} \langle \vec{N} \rangle \\ \llbracket P \rrbracket = \Omega \quad \text{si } P \Uparrow \end{array} \left| \begin{array}{l} \llbracket \sum a(\vec{x}) \cdot P_a \rrbracket = \sum a(\vec{x}) \cdot \llbracket P_a \rrbracket \\ \llbracket x \rrbracket = x \end{array} \right.$$

### Théorème (Associativité)

$$\llbracket D[N_1/x_1, \dots, N_n/x_n] \rrbracket = \llbracket \llbracket D \rrbracket \llbracket \llbracket N_1 \rrbracket / x_1, \dots, \llbracket N_n \rrbracket / x_n \rrbracket \rrbracket$$

## Ludique – Desseins Standards

Un dessin est **standard** s'il est total, sans coupure ni identité, linéaire et avec un ensemble fini de variables libres.

*Les desseins de Girard*

*Les desseins sans coupure ni identité sont définis par la syntaxe:*

$$\begin{aligned} N & ::= \sum a(\vec{x}).P_a \\ P & ::= \Omega \mid \boxtimes \mid x|\bar{a}\langle N_1, \dots, N_n \rangle \end{aligned}$$

*(à comparer à la définition des formes normales du  $\lambda$ -calcul comme étant héréditairement en forme normale de tête ( $k, l \geq 0$ ):*

$$\begin{aligned} n & ::= \lambda x_1 \dots x_k . p \\ p & ::= (y)n_1 \dots n_l \end{aligned}$$

$x|\bar{a}\langle N_1, \dots, N_n \rangle$  est dite *forme normale de tête*)

## Ludique – Orthogonalité & Comportements

- Deux desseins atomiques  $P, N$  sont dits *orthogonaux* quand  $\llbracket P[N/x_0] \rrbracket = \perp$ . Noté:  $P \perp N$
- Si  $\mathbf{X}$  est un ensemble de desseins atomiques de même polarité,  $\mathbf{X}^\perp$  est défini par

$$\mathbf{X}^\perp := \{E : \forall D \in \mathbf{X}, D \perp E\}.$$

- Un *comportement*  $\mathbf{X}$  est un ensemble de desseins atomiques de même polarité tels que  $\mathbf{X}^{\perp\perp} = \mathbf{X}$ .
- Exemples de comportements (avec  $\perp^- = \sum a(\vec{x}).\perp$ ):

$$\mathbf{0}^+ := \{\perp\}, \quad \mathbf{0}^- := \{\perp^-\}, \quad \mathbf{T}^+ := \mathbf{0}^{-\perp}, \quad \mathbf{T}^- := \mathbf{0}^{+\perp}.$$

# Ludique – Comportement de Séquent

## Définition

- Un **séquent positif**  $\Gamma$  est un ensemble de la forme  $x_1 : \mathbf{P}_1, \dots, x_n : \mathbf{P}_n$ , où  $x_1, \dots, x_n$  sont des variables distinctes et  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$  sont des comportements positifs (atomiques).
- Un **séquent négatif**  $\Gamma, \mathbf{N}$  est un séquent positif  $\Gamma$  enrichi par un comportement négatif (atomique)  $\mathbf{N}$ , auquel aucune variable n'est associée.
- $P \models \Gamma$  si  $\text{fv}(P) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\llbracket P[N_1/x_1, \dots, N_n/x_n] \rrbracket = \blacklozenge$  pour tout  $N_1 \in \mathbf{P}_1^\perp, \dots, N_n \in \mathbf{P}_n^\perp$ .
- $N \models \Gamma, \mathbf{N}$  dès que  $\text{fv}(N) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\llbracket P[N[N_1/x_1, \dots, N_n/x_n]/x_0] \rrbracket = \blacklozenge$  pour tout  $N_1 \in \mathbf{P}_1^\perp, \dots, N_n \in \mathbf{P}_n^\perp, P \in \mathbf{N}^\perp$ .

## Ludique – Comportements Logiques

*Connecteurs Logiques*,  $\alpha = (\vec{x}_\alpha, \{a_1(\vec{x}_1), \dots, a_m(\vec{x}_m)\})$  (ou  $a(\vec{x}) \in \alpha$ ):

- $\vec{x}_\alpha = x_1, \dots, x_n$ , le *répertoire* de  $\alpha$ : séquence de variables et
- $\{a_1(\vec{x}_1), \dots, a_m(\vec{x}_m)\}$ , le *corps* de  $\alpha$ : ensemble fini d'actions négatives, avec  $a_1, \dots, a_m$  distinctes.

$$\begin{aligned}\bar{a}\langle \mathbf{N}_{i_1}, \dots, \mathbf{N}_{i_m} \rangle &:= \{x_0 | \bar{a}\langle N_1, \dots, N_m \rangle : N_1 \in \mathbf{N}_{i_1}, \dots, N_m \in \mathbf{N}_{i_m}\}, \\ \bar{\alpha}\langle \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n \rangle &:= \left( \bigcup_{a(\vec{x}) \in \alpha} \bar{a}\langle \mathbf{N}_{i_1}, \dots, \mathbf{N}_{i_m} \rangle \right)^{\perp\perp}, \\ \alpha\langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \rangle &:= \bar{\alpha}\langle \mathbf{P}_1^\perp, \dots, \mathbf{P}_n^\perp \rangle^\perp,\end{aligned}$$

*Comportements Logiques*:

$$\mathbf{P} := \bar{\alpha}\langle \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n \rangle, \quad \mathbf{N} := \alpha\langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \rangle$$

## Ludique – Comportements de MALL

Les connecteurs usuels de **MALL** peuvent être définis comme suit (\* est un nom d'arité nulle):

$$\begin{array}{llll}
 \wp & := \{\wp(x_1, x_2)\}, & \otimes & := \overline{\wp}, & \uparrow & := \{\uparrow(x_1)\}, & \perp & := \{*\}, \\
 \& & := \{\pi_1(x_1), \pi_2(x_2)\}, & \oplus & := \overline{\&}, & \downarrow & := \overline{\uparrow}, & \top & := \emptyset, \\
 \bullet & := \overline{\wp}, & \iota_i & := \overline{\pi_i}, & \downarrow & := \overline{\uparrow}, & & & 
 \end{array}$$

$\mathbf{N} \otimes \mathbf{M} = \bullet \langle \mathbf{N}, \mathbf{M} \rangle^{\perp\perp}$	$\mathbf{N} \oplus \mathbf{M} = (\iota_1 \langle \mathbf{N} \rangle \cup \iota_2 \langle \mathbf{M} \rangle)^{\perp\perp}$
$\downarrow \mathbf{N} = \downarrow \langle \mathbf{N} \rangle^{\perp\perp}$	$\mathbf{0} = \emptyset^{\perp\perp}$
$\mathbf{P} \wp \mathbf{Q} = \bullet \langle \mathbf{P}^{\perp}, \mathbf{Q}^{\perp} \rangle^{\perp}$	$\mathbf{P} \& \mathbf{Q} = \iota_1 \langle \mathbf{P}^{\perp} \rangle^{\perp} \cap \iota_2 \langle \mathbf{Q}^{\perp} \rangle^{\perp}$
$\uparrow \mathbf{P} = \downarrow \langle \mathbf{P}^{\perp} \rangle^{\perp}$	$\top = \emptyset^{\perp}$

## Ludique – Matérialité et Gain

- Étant donné un comportement  $\mathbf{X}$  et  $D \in \mathbf{X}$ , il y a une “portion minimale” de  $D$  qui est nécessaire pour interagir avec les desseins de  $\mathbf{X}^\perp$ . C'est appelé la *partie matérielle* de  $D$  dans  $\mathbf{X}$ .

$$|D|_{\mathbf{X}} := \bigcap \{E \subseteq D : E \in \mathbf{X}\}$$

- Un dessein  $D \in \mathbf{X}$  est dit *matériel* si  $D = |D|_{\mathbf{X}}$ ,
- $|\mathbf{X}|$  dénote l'ensemble de desseins matériels de  $\mathbf{X}$ .
- Un dessein est *gagnant* si il est matériel et sans démon.
- $\mathbf{X}_w$  dénote l'ensemble des desseins gagnants de  $\mathbf{X}$ .

## Ludique – Complétude Interne

Un notion purement moniste, locale et interne de complétude:

- Des constructions de comportement où rien ne manque;
- Cela signifie qu'on peut donner une description directe et précise des éléments de comportements logiques sans utiliser l'orthogonalité et sans référence à un quelconque système de preuve.

Les connecteurs logiques satisfont la *complétude interne*:

- $\bar{\alpha}\langle \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n \rangle = \bigcup_{a(\vec{x}) \in \alpha} \bar{a}\langle \mathbf{N}_{i_1}, \dots, \mathbf{N}_{i_m} \rangle \cup \{\mathbf{X}\}$ .
- $\alpha\langle \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \rangle = \{ \sum a(\vec{x}).P_a : P_a \models x_{i_1} : \mathbf{P}_{i_1}, \dots, x_{i_m} : \mathbf{P}_{i_m} \text{ for every } a(\vec{x}) \in \alpha \}$ .

*Mystère de l'incarnation*:  $|\mathbf{P} \& \mathbf{Q}|$  est isomorphe à  $|\mathbf{P}| \times |\mathbf{Q}|$ .

## Ludique & Calcul

Les *Desseins de données* sont des desseins négatives générés coinductivement comme suit:

$$d ::= \uparrow \bar{a} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$$

$$\text{Mots sur } \Sigma: \epsilon^* = \uparrow \bar{\text{nil}} \quad (lw)^* = \uparrow \bar{l} \langle w^* \rangle$$

### Théorème

Pour tout *automate fini déterministe*  $\mathcal{A}$ , il existe un *dessin standard positif finiment généré* tel que pour tout  $w \in \Sigma^*$ ,  $\mathcal{A}$  accepte  $w$  ssi  $P[w^*/x] \Downarrow \blacklozenge$  (et réciproquement).

### Théorème

Pour toute *machine de Turing*  $\mathbf{M}$ , il existe un *dessin positif linéaire et sans identité finiment généré* tel que pour tout  $w \in \Sigma^*$ ,  $\mathbf{M}$  accepte  $w$  ssi  $P[w^*/x] \Downarrow \blacklozenge$  (et réciproquement).

# Vision Ludique de la Focalisation

## Plan

- *Fontions Interactives*
- *Connecteurs Synthétiques*
- *Dessein Focalisant*
- *Section-rétraction*
- *Focalisation*

## **Question:**

Comment transformer  $\mathbf{P} = \bar{\alpha} \langle \uparrow(\bar{\beta} \langle \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m \rangle), \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n \rangle$  en  $\mathbf{Q} = \bar{\alpha} \bar{\beta} \langle \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n \rangle$ , *comportement focalisé* ?

## Fonctions Interactives

### Définition (Fonction Interactive)

Étant donnés des comportements logiques positifs ou négatifs  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ , une fonction interactive  $f : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$  est un dessein  $f \models \mathbf{F}^\perp, x_0 : \mathbf{G}$  (resp.  $f \models \mathbf{G}, x_0 : \mathbf{F}^\perp$ ).

On écrit  $f(P)$  pour  $\llbracket P[f/x_0] \rrbracket$ ,  $P \in \mathbf{F}$  (resp.  $f(M)$  pour  $\llbracket f[M/x_0] \rrbracket$ ,  $M \in \mathbf{F}$ ), et  $f(\mathbf{F})$  pour  $\{f(D) : D \in \mathbf{F}\}$ .

(a) Le  $fax$  défini récursivement comme  $i(x_0) := \sum i(x_0)_a$  avec  
 $i(x_0)_a := a(y_1, \dots, y_k).x_0|\bar{a}\langle i(y_1), \dots, i(y_k) \rangle$   
 $i(x_0)$  joue le rôle de la fonction identité:  $i(x_0)(D) = D, \forall D$ .

(b)  $u_{\alpha\beta} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{P}$  comme  $u_{\alpha\beta} := \sum_{\alpha\beta} u_{ab} + \sum_{c \notin \alpha\beta} i(x_0)_c$  avec  $u_{ab}$ , pour tout  $ab \in \alpha\beta$ , défini comme:

$$\begin{aligned} u_{ab} &:= ab(x_{a_1}, \dots, x_{a_{k_a}}).x_0|\bar{a}\langle i(x_{a_1}), \dots, i(x_{a_{k_a}}) \rangle && \text{si } x_1 \neq x_{a_1} \\ u_{ab} &:= ab(\mathbf{y}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{k_a}}).x_0|\bar{a}\langle \uparrow(\mathbf{y}).\mathbf{y} | && \\ &\quad \bar{b}\langle i(\mathbf{y}) \rangle, i(x_{a_2}), \dots, i(x_{a_{k_a}}) \rangle && \text{si } x_1 = x_{a_1}. \end{aligned}$$

## Signatures et Connecteurs Synthétiques

$\mathcal{A} = (A, \text{ar})$  une signature et  $A^n := \{a \in A : \text{ar}(a) = n\}$ .  $\mathcal{A}$  est **synthétique** si:

- $\forall a \in A^n, b \in A^m, 1 \leq i \leq n \exists a[b/i] \in A^{n+m-1}$ .
- $a[b/i] = c[d/j]$  seulement si  $a = c, b = d$  et  $i = j$ .
- **shift**:  $\uparrow \in A^1$ . On notera  $\downarrow$  pour  $\bar{\uparrow}$  et  $\uparrow \bar{a}\langle \bar{N} \rangle$  pour  $\uparrow (x).x|\bar{a}\langle \bar{N} \rangle$ .

### Définition (Connecteur synthétique)

Soient  $\alpha, \beta$  des connecteurs logiques avec des répertoires  $z_1, \dots, z_n$  et  $w_1, \dots, w_m$ . Si  $1 \leq i \leq n$ , on définit:  $\gamma = \text{synth}(\alpha, \beta, i)$  d'arité  $n + m - 1$  appelé le **connecteur synthétique** associé à  $(\alpha, \beta, i)$ :

- Le repertoire de  $\gamma$  est  $z_1, \dots, z_{i-1}, w_1, \dots, w_m, z_{i+1}, \dots, z_n$ .
- Le corps de  $\gamma$  est composé des actions négatives:
  - $a(\vec{x}) \in \alpha$  tel que  $z_i \notin \{\vec{x}\}$ ;
  - $a[b/j](\vec{x}[\vec{y}/j])$  tel que  $a(\vec{x}) \in \alpha, b(\vec{y}) \in \beta$  et  $z_i = x_j$ .

## Exemples de connecteurs synthétiques

Si  $\mathcal{L} = (L, ar)$  est une signature synthétique contenant les noms unaires  $\pi_1, \pi_2$  et le nom binaire  $\wp$ , on définit:

$$\begin{aligned} \top &:= \emptyset, & \wp &:= \{x_1, x_2, \{\wp(x_1, x_2)\}\}, \\ \uparrow &:= \{x, \{\uparrow(x)\}\}, & \& &:= \{y_1, y_2, \{\pi_1(y_1), \pi_2(y_2)\}\}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\gamma = \text{synth}(\wp, \&, 1) = (y_1, y_2, x_2, \{\wp[\pi_1/1](y_1, x_1), \wp[\pi_2/1](y_2, x_1)\})$$

**Règles d'inférence:**

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, \mathbf{P}, \mathbf{R}}{\vdash \Gamma, \gamma(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})} \gamma \quad \vdash \Gamma, \mathbf{Q}, \mathbf{R}}{\vdash \Gamma, \gamma(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})} \gamma}{\vdash \Gamma, \mathbf{N} \quad \vdash \Delta, \mathbf{K}} \bar{\gamma}_1 \quad \frac{\vdash \Gamma, \mathbf{M} \quad \vdash \Delta, \mathbf{K}}{\vdash \Gamma, \Delta, \bar{\gamma}(\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{K})} \bar{\gamma}_2$$

Cela peut être fait *interactivement!*

## Dessein Focalisant

$\alpha, \beta$  des connecteurs logiques de répertoire  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m$   
 et  $1 \leq i \leq n$ . On définit deux fonctions interactives  $f_{(\alpha, \beta, i)}$  et  
 $u_{(\alpha, \beta, i)}$ .

$$\begin{aligned}
 f_{(a, \beta, i)} &:= i_a && \text{si } z_i \notin \{\vec{x}\}, \\
 f_{(a, \beta, i)} &:= a(\vec{x}).z_i \mid \downarrow \langle \sum_{\beta} b(\vec{y}).x_0 \mid \overline{a[b/j]} \langle i(\vec{x}[\vec{y}/j]) \rangle \rangle && \text{si } z_i = x_j, \\
 f_{(\alpha, \beta, i)} &:= \sum_{\alpha} f_{(a, \beta, i)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{(a, b, i)} &:= i_a && \text{si } z_i \notin \{\vec{x}\}, \\
 u_{(a, b, i)} &:= a[b/j](\vec{x}[\vec{y}/j]).x_0 \mid \overline{a} \langle i(\vec{x}_l), \uparrow \overline{b} \langle id(\vec{y}) \rangle, i(\vec{x}_r) \rangle && \text{si } z_i = x_j, \\
 u_{(\alpha, \beta, i)} &:= \sum_{\gamma} u_{(a, b, i)},
 \end{aligned}$$

(avec  $\vec{x} = \vec{x}_l, x_j, \vec{x}_r$  quand on définit  $u_{(a, b, i)}$  et  $\gamma = \text{synth}(\alpha, \beta, i)$   
 quand on définit  $u_{(\alpha, \beta, i)}$ .)

# Paire de Section & Rétraction

## Définition (Section & Rétraction)

Soient  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  des comportements logiques de la même polarité. Une *paire de section-rétraction* de  $\mathbf{G}$  dans  $\mathbf{F}$  est une paire de fonctions interactives  $(s, r)$  avec  $s : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{F}$  et  $r : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ , telle que  $r \circ s = i(x_0)$ .

Elle est dite *stricte* si elle envoie les desseins sans démon dans les desseins sans démon.

## Théorème

Toute famille de paires de sections-rétractions (strictes) entre  $P_i$  et  $Q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) peut être étendue en une paire de section-rétraction (stricte) entre  $\alpha(P_1, \dots, P_n)$  et  $\alpha(Q_1, \dots, Q_n)$  pour tout connecteur logique  $\alpha$ .

# Focalisation

## Théorème

- 1  $f_{(\alpha,\beta,i)}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$  et  $f_{(\alpha,\beta,i)}(\mathbf{P}_w) \subseteq \mathbf{Q}_w$ ;
- 2  $u_{(\alpha,\beta,i)}(|\mathbf{Q}|) = |\mathbf{P}|$  et  $u_{(\alpha,\beta,i)}(\mathbf{Q}_w) \subseteq \mathbf{P}_w$ ;
- 3  $f_{(\alpha,\beta,i)} \circ u_{(\alpha,\beta,i)} = i(x_0)$ .

*En utilisant la full-completeness de la Ludique pour MALL (sans atomes), on obtient une preuve de focalisation.*

# Conclusion

- Établir précisément le lien avec les résultats de compression de bande;
- Au-delà de MALL: le fragment exponentiel grâce aux travaux de Faggian et Basaldella.