

Deux raffinements de la résolution

Samuel Mimram

22 juin 2005

1 La résolution sémantique

1.1 Complétude de la résolution sémantique

Montrons que la résolution sémantique est complète : pour tout ordre \prec stable, pour toute interprétation de Herbrand \mathcal{H}_0 , pour tous algorithmes \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- qui semi-décident de la validité (resp. de l'invalidité) dans \mathcal{H}_0 , un ensemble S de clauses est insatisfiable si et seulement si l'on peut dériver la clause vide \square à partir de S par la seule règle de résolution sémantique.

La direction « si » est évidente car la résolution sémantique est une restriction de la résolution qui a été prouvée correcte.

Réciproquement, si S est un ensemble de clauses insatisfiable alors, d'après le théorème de Herbrand (théorème 7 du cours), il existe un ensemble fini S_0 d'instance closes de clauses de S qui est insatisfiable. Notons A_1^0, \dots, A_n^0 l'ensemble (fini) des atomes clos figurant dans les clauses de S_0 . On suppose les A_i^0 dans un ordre tel que si $A_i^0 \prec A_j^0$ alors $i < j$ (on étend \prec en un ordre total sur les A_i^0). Appelons un arbre sémantique clos *adapté* si ses nœuds sont de la forme $\pm A_1^0, \dots, \pm A_k^0$ avec $k \leq n$. Par construction, il existe un arbre sémantique clos adapté, tel qu'à tout nœud d'échec N est associée une clause C_N de S et une substitution θ_N telles que $C_N\theta_N$ est une clause fautive en N .

Appelons *arbre décoré* pour un ensemble de clauses S' tout uplet $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$, où T est un arbre sémantique clos adapté, C_\bullet associée à chaque nœud d'échec (feuille de T) N une clause C_N de S' , et θ_\bullet associée à chaque nœud d'échec N une substitution θ_N telle que $C_N\theta_N$ est close et fautive en N . Il existe donc un arbre décoré pour S .

Choix des clauses sur lesquelles résoudre Soit donc S' un ensemble de clauses et un arbre décoré $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ pour S' . Soit pour chaque nœud d'échec N , $C_N\theta_N$ une clause close qui est fautive en N . Soit $\pm_N H_N$ le littéral $\pm A_i^0$ de $C_N\theta_N$ avec i maximal. On peut écrire $C_N\theta_N$ de façon unique sous la forme $\pm_N H_N \vee \mathcal{V}_N \vee \mathcal{F}_N$, où \mathcal{V}_N est la disjonction des littéraux (autres que $\pm_N H_N$) de $C_N\theta_N$ vrais dans \mathcal{H}_0 , et \mathcal{F}_N est celle de ceux (autres que $\pm_N H_N$) qui sont faux dans \mathcal{H}_0 . On remarque que C_N est génératrice (*i.e.* est telle que $C_N\theta_N$ soit fautive dans \mathcal{H}_0) si et seulement si tous les littéraux qui apparaissent dans

$C_N \theta_N$ sont faux, si et seulement si $\mathcal{H}_0 \not\models \pm_N H_N$ et \mathcal{V}_N est la disjonction vide (tous les littéraux sont faux, aucun n'est vrai dans \mathcal{H}_0).

On construit une interprétation partielle I_k c'est-à-dire une fonction qui à tout A_i^0 , $1 \leq i \leq k$ associe « vrai » ou « faux » par récurrence sur k : I_0 est la fonction de domaine vide, et si I_{k-1} est déjà construite, on considère toutes les clauses génératrices C_N telles que $\pm_N H_N = \pm A_k^0$, où le signe \pm est $-$ si $\mathcal{H}_0 \models A_k^0$, $+$ sinon (d'après la remarque précédente); s'il existe une telle clause génératrice telle que $I_{k-1} \not\models \mathcal{F}_N$, posons $I_k = I_{k-1} \cup \{\pm A_k^0\}$; sinon $I_k = I_{k-1} \cup \{\mp A_k^0\}$. Finalement, on pose $I = I_n$. L'interprétation I ainsi définie a les propriétés suivantes :

- (I.1) Pour toute clause génératrice C_N telle que $I \not\models \mathcal{F}_N$, on a $I \models \pm_N H_N$.
(I.2) Si $I \models \pm H$ et $\mathcal{H}_0 \not\models \pm H$ (où H est un atome clos apparaissant dans S_0), alors il existe une clause génératrice C_N telle que $\pm_N = \pm$ et $H_N = H$.
De plus, $I \not\models \mathcal{F}_N$.

La propriété suivante est clairement vérifiée :

$$\forall k, 1 \leq k \leq n \Rightarrow I_k \models \pm A_k^0 \Leftrightarrow (\forall p, 0 \leq p \leq n - k \Rightarrow \forall k', k \leq k' \leq k + p \Rightarrow I_{k'} \models \pm A_k^0)$$

i.e. la validité d'un atome A_k^0 est la même pour toutes les interprétations $I_{k'}$ avec $k' \geq k$. Ceci se montre, à n et k fixés, par récurrence simple sur p . Le sens \Leftarrow est évident (on utilise le cas particulier $p = 0$). Montrons le sens \Rightarrow . C'est trivial pour $p = 0$, car alors nécessairement $k' = k$. Si on suppose la propriété vérifiée au rang p , on sait que $I_{k+p} \models \pm A_k^0$. Or $I_{k+p+1} = I_{k+p} \cup \{+A_{k+p}^0\}$ ou $I_{k+p+1} = I_{k+p} \cup \{-A_{k+p}^0\}$: dans tous les cas on a $I_{k+p+1} \models \pm A_k^0$ (la validité du littéral clos $\pm A_k^0$ n'a pas été modifiée) et la propriété est vérifiée au rang $p + 1$.

En particulier, comme $I = I_n$, on a la propriété \mathcal{P}

$$\forall k, 1 \leq k \leq n \Rightarrow I_k \models \pm A_k^0 \Leftrightarrow I \models \pm A_k^0$$

(l'implication $I_k \models \pm A_k^0 \Leftarrow I \models \pm A_k^0$ peut être prouvée de même en montrant par récurrence sur p , $0 \leq p \leq n - k$, que $I_n \models \pm A_k^0 \Rightarrow I_{n-p} \models \pm A_k^0$).

Montrons la propriété (I.1). Soit C_N une clause génératrice telle que $I \not\models \mathcal{F}_N$. Notons k l'entier tel que $\pm_N H_N = \pm A_k^0$. Par construction, on a alors $I_k = I_k \cup \{\pm H_N\}$ car $I \not\models \mathcal{F}_N$ et donc $I_k \models \pm_N H_N$. D'après la propriété \mathcal{P} évoquée ci-dessus on a donc bien $I \models \pm_N H_N$.

Montrons la propriété (I.2). Soit $H \equiv A_k^0$ un atome clos tel que $I \models \pm H$ et $\mathcal{H}_0 \not\models \pm H$. Comme $I \models \pm A_k^0$, on a $I_k \models \pm A_k^0$ d'après la propriété \mathcal{P} . Si I_k avait été construite par $I_k = I_{k-1} \cup \{\mp A_k^0\}$ alors on aurait $I_k \not\models \pm A_k^0$ ce qui est exclu d'après ce qui précède. I_k a donc été construite par $I_k = I_{k-1} \cup \{\pm A_k^0\}$ ce qui signifie par définition de la construction de I_k qu'il existe une clause génératrice C_N telle que $\pm_N = \pm$ et $H_N = A_k^0 = H$. De plus on a $I_k \not\models \mathcal{F}_N$ donc $I \not\models \mathcal{F}_N$ car $H_N = A_k^0$ est supposée par définition d'indice k maximal dans C_N donc tous les atomes A_i^k apparaissant dans \mathcal{F}_N sont tels que $i < k$ et, d'après la propriété \mathcal{P} , ils sont valides dans I_{k-1} si et seulement s'ils sont valides dans I .

I étant une interprétation de Herbrand, c'est aussi une branche de l'arbre sémantique. Elle définit donc une unique branche de l'arbre décoré $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$.

Au bout de cette branche dans T , on trouve donc un unique nœud d'échec N_I . L'idée est que C_{N_I} va être la prémisse principale dans la règle de résolution sémantique.

Prémisse principale Montrons donc en premier que C_{N_I} peut être présentée de sorte à obéir aux restrictions imposées aux prémisses principales, c'est-à-dire la condition (iv). Par définition, la clause $C_{N_I}\theta_{N_I}$ est fautive en N_I , donc $I \not\models \mathcal{F}_{N_I}$. Si C_{N_I} était génératrice alors d'après la propriété (I.1) on aurait $I \models \pm_{N_I}H_{N_I}$ et $C_{N_I}\theta_{N_I}$ serait vraie dans I , il y a contradiction. Donc C_{N_I} n'est pas génératrice (*i.e.* $\mathcal{H}_0 \models C_{N_I}\theta_{N_I}$) et nécessairement $\mathcal{A}^-(C_{N_I})$ retourne « faux ». Comme $\mathcal{H}_0 \models C_{N_I}\theta_{N_I}$, il existe un littéral L de $C_{N_I}\theta_{N_I}$ tel que $\mathcal{H}_0 \models L$. Soit $\mp A'_1$ n'importe quel littéral de C_{N_I} tel que $\mp A'_1\theta_{N_I} = L$. Ainsi C_{N_I} s'écrit $C' \vee \mp A'_1$ et vérifie la condition (iv).

Prémisses auxiliaires Considérons A'_1 défini comme ci-dessus. Comme $C_{N_I}\theta_{N_I}$ est fautive dans I , on a $I \not\models \mp A'_1\theta_{N_I}$, soit encore $I \models \pm A'_1\theta_{N_I}$. De plus, par définition de A'_1 , on a $\mathcal{H}_0 \models \mp A'_1\theta_{N_I}$, donc $\mathcal{H}_0 \not\models \pm A'_1\theta_{N_I}$. Par la propriété (I.2), il existe une clause génératrice C_N telle que $\pm_N = \pm$ et $H_N = \pm A'_1\theta_{N_I}$. De plus on a $I \not\models \mathcal{F}_N$.

Soient $\pm A_1, \dots, \pm A_n$ les littéraux de C_N tels que $\pm A_i\theta_N = \pm H_N$. La clause C_N est de la forme $C_1 \vee \pm A_1 \vee \dots \vee \pm A_n$, montrons qu'elle convient comme clause auxiliaire. D'après ce qui précède, on a $n \geq 1$ (il existe au moins un A_i qui convient) et la condition (i) est donc vérifiée.

La clause C_N est génératrice : on a $\mathcal{H}_0 \not\models C_N\theta_N$, donc $\mathcal{H}_0, \theta_N \not\models C_N$ (où θ_N est vue comme un environnement) soit encore $\mathcal{H}_0 \not\models C_N$. On en déduit que $\mathcal{A}^+(C_N)$ doit retourner « faux ». Supposons que les A_i ne soient pas tous maximaux. Il existerait alors un littéral L dans C_N tel que $L \succ \pm A_i$ pour un certain i , $1 \leq i \leq n$ et on aurait $L\theta_N \succ \pm A_i\theta_N = \pm H_N$ par stabilité de l'ordre, ce qui contredirait la maximalité de H_N dans $C_N\theta_N$ (H_N est par définition l'atome A_i^0 d'indice i maximum dans $C_N\theta_N$, il est donc maximal par définition du choix de l'indexation des atomes). La condition (iii) est donc vérifiée.

Par définition des A_i , on a pour tout i , $A_i\theta_N = H_N = A'_1\theta_{N_I}$. Comme on a supposé (sans perte de généralité) que, pour tout i , A_i et A'_1 n'ont aucune variable en commun, la substitution $\theta_N \cup \theta_{N_I}$ est clairement un unificateur des A_i et de A'_1 . Soit σ leur mgu : la condition (ii) est alors vérifiée. De plus, $\theta_N \cup \theta_{N_I}$ est une instance $\sigma\theta$ pour une certaine substitution θ .

Terminaison Montrons que le processus termine. Définissons le nouvel arbre décoré $(T', C'_\bullet, \theta'_\bullet)$ à partir de $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ comme suit. Soit S' l'ensemble de clauses dont $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ est un arbre décoré, et soit S'' l'ensemble de clauses S' plus le résolvant $C_1\sigma \vee C'\sigma$.

Commençons par montrer que $(C_1\sigma \vee C'\sigma)\theta = C_1\theta_N \vee C'\theta_{N_I}$ est fautive au nœud N_I . Clairement, $C'\theta_{N_I}$ est fautive au nœud N_I car elle est incluse dans $C_{N_I}\theta_{N_I}$ qui décore le nœud d'échec N_I . De plus, d'après la propriété (I.2), C_N

est génératrice (donc de la forme $H_N \vee \mathcal{F}_N$) et $I \not\models \mathcal{F}_N$; par construction, $C_1\theta_N$ est sous-clause de \mathcal{F}_N donc $I \not\models C_1$. Ainsi $I \not\models (C_1\sigma \vee C'\sigma)\theta$.

Il est donc sensé de considérer le nœud N' le plus haut au-dessus de N_I qui rend le résolvant $(C_1\sigma \vee C'\sigma)\theta$ faux. Alors :

- (a) Si N' est strictement plus haut que N_I dans T , soit T' l'arbre sémantique clos dont les nœuds d'échec sont N' plus tous les nœuds d'échec de T qui ne sont pas en dessous de N' . On pose $C'_{N'}$ égale au résolvant $C_1\sigma \vee C'\sigma$ et $\theta_{N'} = \theta$, alors que $C'_{N''} = C_{N''}$ et $\theta'_{N''} = \theta_{N''}$ pour tout nœud $N'' \neq N$.
- (b) Si $N' = N_I$, on pose $T' = T$, C'_{N_I} égale au nouveau résolvant $C_1\sigma \vee C'\sigma$, $\theta'_{N_I} = \theta$ et $C'_{N''} = C_{N''}$ et $\theta'_{N''} = \theta_{N''}$ pour tout nœud $N'' \neq N$.

Ce dernier cas ne peut se produire que si l'atome le plus grand (le plus bas dans l'arbre) de $(C_1\sigma \vee C'\sigma)\theta$ est le même que celui de $C_{N_I}\theta_{N_I}$, soit H_{N_I} . Considérons les autres littéraux de $(C_1\sigma \vee C'\sigma)\theta = C_1\theta_N \vee C'\theta_{N_I}$. Les littéraux de $C_1\theta_N$ sont par définition de C_1 strictement plus petits (strictement plus haut) que $H_N = A'_1\theta_{N_I}$ qui est un atome de $C_{N_I}\theta_{N_I}$, donc inférieurs (plus haut) ou égaux à H_{N_I} . Les littéraux de $C_1\theta_N$ sont donc toujours strictement plus hauts que H_{N_I} . La seule raison pour laquelle H_{N_I} pourrait donc apparaître dans $C_1\theta_N \vee C'\theta_{N_I}$ c'est qu'il apparaisse dans $C'\theta_{N_I}$. Ce qui est important, c'est qu'en passant de $C_{N_I}\theta_{N_I}$ à $C_1\theta_N \vee C'\theta_{N_I}$ comme décoration du nœud N_I , on a moralement remplacé le « grand » littéral H_N par la clause $C_1\theta_N$ qui ne contient que des littéraux strictement plus petits.

Formellement, on définit la mesure $\mu_1(C_N, \theta_N)$ du nœud d'échec N d'un arbre décoré $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ comme étant le multi-ensemble contenant autant de fois l'entier i qu'il y a de littéraux $\pm A^i$ de C_N tels que $A^i\theta_N = A_i^0$ (le i^e atome clos de l'énumération choisie). Dans le cas (b), où $N' = N_I$ (et en posant $N \equiv N_I$), ce multi-ensemble décroît, dans l'ordre multi-ensemble, lors du remplacement de C_{N_I} par $C_1\sigma \vee C'\sigma$. On définit ensuite la mesure $\mu^-(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ comme étant le multi-ensemble des $\mu_1(C_N, \theta_N)$, N parcourant les nœuds d'échec de T . Dans le cas (b), $\mu_1(C_N, \theta_N)$ décroît strictement, les autres $\mu_1(C_{N''}, \theta_{N''})$ restant inchangés; donc la mesure μ^- décroît dans l'ordre multi-ensemble dans le cas (b). D'un autre côté, la taille $|T|$ de l'arbre T décroît strictement dans le cas (a) et est inchangée dans le cas (b). Donc la mesure $\mu(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$, définie comme le couple $(|T|, \mu^-(T, C_\bullet, \theta_\bullet))$ ordonnée lexicographiquement, décroît lors du passage de $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ à $(T', C'_\bullet, \theta'_\bullet)$. L'ordre lexicographique sur les couples formés d'un entier et d'un multi-ensemble de multi-ensembles d'entiers étant bien fondé, le processus termine, et l'on peut donc dériver la clause vide en un nombre fini d'étapes de résolution sémantique.

La résolution sémantique est donc bien complète.

1.2 Cas particulier commun avec la résolution ordonnée

Considérons \mathcal{H}_0 l'interprétation de Herbrand vide et définissons \mathcal{A}^+ , \mathcal{A}^- et une fonction de sélection sel . Nécessairement, si une clause C ne contient que des littéraux positifs $\mathcal{A}^+(C)$ doit retourner « faux » et si C contient au moins un littéral négatif, $\mathcal{A}^-(C)$ doit retourner « faux » (et cela suffit pour que \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- soient des algorithmes qui conviennent).

On pose $\mathcal{A}^+(C)$ retourne « faux » si et seulement si C ne contient que des littéraux positifs et $\mathcal{A}^-(C)$ retourne « faux » si et seulement si C contient au moins un littéral négatif. On définit de plus $\text{sel}(C)$ comme l'ensemble des littéraux négatifs de C .

Montrons qu'avec les paramètres définis ci-dessus la résolution sémantique (\mathcal{S}) et la résolution ordonnée avec sélection (\mathcal{O}) où l'on ne résout que sur un littéral sélectionné dans la clause principale – ce qui ne nuit en rien à la correction ou à la complétude – coïncident. Si C est une clause, on a les séries d'équivalences suivantes :

1. – C peut être principale dans \mathcal{S}
 - $\mathcal{A}^-(C)$ retourne « faux »
 - C contient au moins un littéral négatif
 - $\text{sel}(C) \neq \emptyset$
 - C peut être clause principale dans \mathcal{O}
2. – C peut être auxiliaire dans \mathcal{S}
 - $\mathcal{A}^+(C)$ retourne « faux »
 - C ne contient que des littéraux positifs
 - $\text{sel}(C) = \emptyset$
 - C peut être clause auxiliaire dans \mathcal{O}

De plus si A' est un littéral de C et que C peut être principale (dans \mathcal{S} ou \mathcal{O} , ce qui revient au même), les propositions suivantes sont équivalentes :

- on peut résoudre sur $\pm A'$ dans la clause principale de C dans \mathcal{S}
- C est de la forme $C' \vee -A'$ (car les clauses auxiliaires ne contiennent que des littéraux positifs et on résout avec des littéraux de signe opposé dans la clause auxiliaire)
- $-A' \in \text{sel}(C)$
- on peut résoudre sur $-A'$ dans la clause principale de C dans \mathcal{O} (on n'a jamais de clause principale C telle que $\text{sel}(C) = \emptyset$ dans \mathcal{O} car par définition de sel , si $\text{sel}(C) = \emptyset$ alors C ne contient pas de littéral négatif; de plus on a supposé qu'on ne résout que sur un seul littéral négatif à la fois dans la clause principale)

De même, si A_1, \dots, A_n sont des littéraux de C et que C peut être auxiliaire, les propositions suivantes sont équivalentes :

- on peut résoudre sur les A_i dans la clause auxiliaire de C dans \mathcal{S}
- C est de la forme $C_1 \vee +A_1 \vee \dots \vee +A_n$ et les A_i sont maximaux dans C (car les clauses auxiliaires ne contiennent que des littéraux positifs)
- C est de la forme $C_1 \vee +A_1 \vee \dots \vee +A_n$, les A_i sont maximaux dans C et $\text{sel}(C) = \emptyset$ (car les clauses auxiliaires ne contiennent que des littéraux positifs)
- on peut résoudre sur les A_i dans la clause auxiliaire de C dans \mathcal{O}

Ainsi \mathcal{S} et \mathcal{O} ont exactement les mêmes ensembles de couples (prémisse principale, prémisse auxiliaire), et on peut résoudre sur les mêmes littéraux de ces prémisses dans les deux raffinements de la résolution et ces couples mènent aux mêmes résolvants dans les deux raffinements. Le cas particulier défini ci-dessus est donc bien tel que la résolution sémantique et la résolution ordonnée

avec sélection coïncident.

1.3 Variante où $S = S_0 \cup S_1$ avec S_0 satisfiable

La règle de résolution ordonnée proposée est clairement correcte car c'est une restriction de la résolution.

Montrons sa complétude. Soit \mathcal{H}_0 une interprétation de Herbrand telle que $\mathcal{H}_0 \models S_0$. Définissons $\mathcal{A}^+(C)$ comme l'algorithme qui renvoie « faux » si et seulement si C n'est pas dans S_0 (cette algorithme convient car si $C \in S_0$ alors $\mathcal{H}_0 \models C$) et $\mathcal{A}^-(C)$ comme l'algorithme qui renvoie « faux » sur toute clause C . Soit

$$\frac{C_1 \vee \pm A_1 \vee \dots \vee \pm A_n \quad C' \vee \mp A'_1}{C_1 \sigma \vee C' \sigma}$$

une instance de la règle de résolution sémantique paramétrée par \mathcal{H}_0 avec \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- tels que définis ci-dessus. Montrons que c'est aussi une instance de la règle de résolution ordonnée proposée.

Par hypothèse, les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) sont vérifiées, donc les propriétés (i') – qui est identique à (i) –, (ii') – qui est identique à (ii) – et (iii') – qui est trivialement impliquée par (iii) – sont vérifiées. De plus, comme (iii) est vérifiée, on sait que $\mathcal{A}^+(C_1 \vee \pm A_1 \vee \dots \vee \pm A_n)$ retourne « faux » donc que $C_1 \vee \pm A_1 \vee \dots \vee \pm A_n$ n'est pas dans S_0 : les prémisses ne sont donc pas toutes les deux dans S_0 .

Supposons que S soit insatisfiable. Alors, par complétude de la résolution sémantique (question 1.1), il existe une dérivation de \square n'utilisant que la règles de résolution sémantique paramétrée par \mathcal{H}_0 (et utilisant \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- comme algorithmes). Or nous venons de montrer que cette dérivation peut être vue comme n'utilisant que la règle de résolution ordonnée proposée (car les deux coïncident ici) ; cela vient aussi du fait que mettre le résolvant dans S_1 n'est pas restrictif car \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- renvoient « faux » dessus (il peut donc être ensuite utilisé comme prémisses principale ou auxiliaire). Donc \square est dérivable par la règle de résolution ordonnée proposée : cette règle est complète.

2 La lock-resolution

2.1 Simulation par la résolution ordonnée avec sélection

Quelques remarques sur le sujet :

- j'ai modifié la condition (iii) en : $i_1 = i_2 = \dots = i_n$ est l'indice minimal de la prémisses de gauche ;
- si un littéral apparaît plusieurs fois dans le résolvant (avec des indices éventuellement différents), j'ai considéré qu'on ne garde qu'une « copie » qui a un index minimal parmi ces copies (le comportement n'était pas spécifié dans ce cas) ;
- j'ai lu la 2^e ligne définissant sel comme : $\text{sel}(-P^- \vee -P(X)) = \{-P^-[i](X)\}$;

- j'ai supposé qu'on avait le droit de faire appel aux clauses de Def dans la question 1 (les traductions ne produisant que des clauses avec des littéraux tous positifs, on n'aurait pas pu résoudre sinon).

Montrons que la règle de résolution ordonnée, avec sélection avec la fonction de sélection et l'ordre proposés, simule la règle de lock-résolution.

Considérons une instance de la règle de lock-résolution :

$$\frac{C \vee i_1 + A_1 \vee i_2 + A_2 \vee \dots \vee i_n + A_n \quad C' \vee j - A'}{C\sigma \vee C'\sigma}$$

On a deux prémisses $C \vee i_1 + A_1 \vee i_2 + A_2 \vee \dots \vee i_n + A_n$ et $C' \vee j - A'$ qui vérifient les conditions (i) à (iv) de la lock-résolution et se résolvent en une clause $C\sigma \vee C'\sigma$ par cette règle. Notons respectivement $P_1(t_1), \dots, P_n(t_n)$ les atomes A_1, \dots, A_n et $P(t')$ l'atome A' . Comme on a supposé l'existence de $\sigma = \text{mgu}\{P_i(t_i) \doteq P(t') \mid 1 \leq i \leq n\}$, on a nécessairement $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$. Par définition de la traduction on a clairement $(C \vee C')^* = C^* \vee C'^*$ et $(C\sigma)^* = C^*\sigma$. Les traductions des prémisses sont donc respectivement $C^* \vee +P^+[i_1](t_1) \vee \dots \vee +P^+[i_n](t_n)$ et $C'^* \vee +P^-[j](t')$.

L'idée va être de décomposer la simulation en trois règles. On obtiendra une dérivation de la forme :

$$\frac{\frac{C^* \vee +P^+[i_1](t_1) \vee \dots \vee +P^+[i_n](t_n) \quad -P^+[i_1](X) \vee \dots \vee -P^+[i_n](X) \vee P(X)}{C^*\sigma'' \vee P(X)\sigma''} \quad \frac{C'^* \vee +P^-[j](t') \quad -P^-[j](X) \vee -P(X)}{C'^* \vee -P(t')}}{C^*\sigma \vee C'^*\sigma}$$

La traduction de la prémisse principale $C'^* \vee +P^-[j](t')$ peut se résoudre, par résolution ordonnée avec sélection, avec la clause $-P^-[j](X) \vee -P(X)$ de Def. En effet, la condition (i) est vérifiée de par l'existence de $+P^-[j](t')$, on a $\text{sel}(C'^* \vee +P^-[j](t')) = \emptyset$ par définition de sel et $P^-[j](t')$ est maximal dans la clause (car la clause, étant une traduction, ne contient que des prédicats « ajoutés » et j est l'indice minimal de ces prédicats par hypothèse) donc la condition (iii) est vérifiée, enfin on a $\text{sel}(-P^-[j](X) \vee -P(X)) = \{-P^-[j](X)\}$ par définition de sel donc la condition (iv) est vérifiée. Clairement, un mgu de $\{P^-[j](X) \doteq P^-[j](t')\}$ est la substitution σ' qui à X associe t' (et est l'identité partout ailleurs). On obtient donc le résolvant $C'^* \vee -P(t')$.

La traduction de la prémisse auxiliaire est $C^* \vee +P^+[i_1](t_1) \vee \dots \vee +P^+[i_n](t_n)$. Elle peut se résoudre, par résolution ordonnée avec sélection avec la clause $-P^+[i_1](X) \vee \dots \vee -P^+[i_n](X) \vee P(X)$ de Def. En effet, la condition (i) est vérifiée car la condition (i) de la lock-resolution est vérifiée, on a $\text{sel}(C^* \vee +P^+[i_1](t_1) \vee \dots \vee +P^+[i_n](t_n)) = \emptyset$ par définition de sel et les $P^-[i_k](t_k)$ sont maximaux dans la clause (car la clause, étant une traduction, ne contient que des prédicats « ajoutés » et i_k est l'indice minimal de ces prédicats par la condition (iii) de la lock-resolution) donc la condition (iii) est vérifiée, enfin on a $\text{sel}(-P^+[i_1](X) \vee \dots \vee -P^+[i_n](X) \vee P(X)) = \{-P^+[i_1](X) \vee \dots \vee -P^+[i_n](X)\}$ par définition de sel donc la condition (iv) est vérifiée. Soit $\sigma'' =$

$\text{mgu}\{P^+[i_k](t_k) \doteq P^+[i_k](X) \ / \ 1 \leq k \leq n\}$; on remarque que l'on peut le définir de façon équivalente comme $\text{mgu}\{X \doteq t_1 \doteq t_2 \doteq \dots \doteq t_n\}$. On peut donc déduire la clause $C^* \sigma'' \vee P(X) \sigma''$ par résolution ordonnée avec sélection.

Enfin, on peut résoudre par résolution ordonnée avec sélection les deux clauses ainsi obtenues. Par définition de sel on a $\text{sel}(C^* \sigma'' \vee P(X) \sigma'') = \text{sel}(C'^* \vee -P(t')) = \emptyset$. De plus, par définition de l'ordre (et par stabilité), les littéraux $P(X) \sigma''$ et $-P(t')$ sont respectivement maximaux dans $C^* \sigma'' \vee P(X) \sigma''$ et $C'^* \vee -P(t')$. Soit $\sigma''' = \text{mgu}\{P(X) \sigma'' \doteq P(t')\}$. On obtient donc le résolvant $C^* \sigma'' \sigma''' \vee C'^* \sigma'''$. Comme on peut supposer que C^* et C'^* ont des variables libres distinctes et que la substitution σ'' n'affecte que des variables de C^* , on a $C'^* = C'^* \sigma''$. Le résolvant peut donc s'écrire $(C^* \vee C'^*) \sigma'' \sigma'''$. Montrons que $\sigma = \sigma'' \sigma'''$ est un mgu de $\{A_{i_k} \doteq A' \ / \ 1 \leq k \leq n\}$ ce que l'on peut réécrire $\{P(t_k) \doteq P(t') \ / \ 1 \leq i \leq k\}$.

- C'est bien un unificateur. En effet, par σ'' , on a $X \sigma'' = t_1 \sigma'' = t_2 \sigma'' = \dots = t_n \sigma''$ et par σ''' on a $X \sigma'' \sigma''' = t' \sigma''' = t' \sigma'' \sigma'''$ (car σ'' n'affecte pas les variables libres de t'). Donc on a $t' \sigma = X \sigma = t_1 \sigma = t_2 \sigma = \dots = t_n \sigma$, ce qui implique que σ est bien un unificateur $\{P(t_k) \doteq P(t') \ / \ 1 \leq i \leq k\}$.
- Réciproquement, tout mgu ς doit être tel que $t' \varsigma = X \varsigma = t_1 \varsigma = t_2 \varsigma = \dots = t_n \varsigma$ et σ ne fait que cela car c'est la composée de σ'' qui unifie t_1, t_2, \dots, t_n et X (ce qui ne fait pas perdre de généralité car X est une variable) et de σ''' qui unifie $X \sigma''$ et t' soit encore $t_1 \sigma''$ et t' .

Si σ est un mgu de $\{A_j \doteq A' \ / \ 1 \leq j \leq n\}$, la résolution ordonnée avec sélection permet donc bien de déduire $(C \sigma \vee C' \sigma)^*$ à partir de $(C \vee_{i_1} + A_1 \vee_{i_2} + A_2 \vee \dots \vee_{i_n} + A_n)^*$ et $(C' \vee_j - A')^*$.

2.2 Correction de la simulation

Supposons que la clause vide \square est déductible de S par lock-résolution; il existe donc une dérivation de \square à partir de S par lock-résolution et, en traduisant comme ci-dessus chacune des étapes de cette dérivation, on montre que $\square^* = \square$ peut être déduite de $S^* \cup \text{Def}$ par résolution ordonnée avec sélection.

2.3 Complétude de la simulation

Intuitivement, si on peut déduire $(C'')^*$ à partir de $(C \vee_{i_1} + A_1 \vee_{i_2} + A_2 \vee \dots \vee_{i_n} + A_n)^*$ et $(C' \vee_j - A')^*$ par résolution ordonnée avec sélection c'est que nécessairement on a résolu les clauses principale et auxiliaire avec une clause de Def comme dans la preuve de correction (c'est les seules clauses avec lesquelles on peut résoudre) et ensuite on n'a pu que résoudre les clauses entre elles (par ce que ces clauses contiennent des littéraux non ajoutés qui sont maximaux donc c'est sur eux qu'il faut résoudre). Formalisons cela.

Quelques lemmes :

1. *Par maximalité des symboles de prédicats « non ajoutés » (i.e. de la forme P par opposition aux prédicats « ajoutés » $P^\pm[i]$) si E est un ensemble de clauses qui ne contient que des éléments de Star alors les clauses qu'on*

peut déduire de E ne contiennent au plus qu'un littéral avec symbole de prédicat « non ajouté ».

En effet, les littéraux « non ajoutés » ne peuvent provenir que de résolutions avec des clauses de Def qui ne contiennent elles-mêmes au plus qu'un littéral non-ajouté. Pour qu'une clause ait deux (ou plus) littéraux non-ajoutés il faudrait résoudre sur une clause qui contient un littéral non-ajouté en faisant la coupure sur des littéraux ajoutés donc non maximaux, ce qui est impossible.

2. Dans toutes les clauses qu'on peut déduire (mis à part les clauses de Def), les littéraux ajoutés apparaissent positivement.

En effet, la seule source de littéraux négatifs sont les clauses de Def et les littéraux ajoutés négatifs sont ceux qui sont sélectionnés. Ils disparaîtront donc quand on utilisera ces clauses comme prémisses (principales) d'une résolution.

3. Toute clause qui contient un littéral non ajouté a été déduite à par résolution d'une règle de Star avec une règle de Def.

Cela découle du lemme précédent : on ne peut pas déduire de clause avec un littéral non ajouté en résolvant sur une clause qui contient un littéral non ajouté car les littéraux non ajoutés étant maximaux c'est sur eux qu'il faudrait faire la coupure et les clauses ne contenant au plus qu'un littéral non ajouté, la clause qu'on déduirait n'aurait pas de littéral non ajouté. Donc si C est une clause qui convient un littéral non ajouté elle a été déduite à partir d'une clause qui ne contient que des littéraux ajoutés (donc qui est dans Star car les littéraux ajoutés apparaissent positivement d'après le lemme précédent). De plus, la clause principale ne peut être qu'une clause de Def car la coupure doit se faire sur des littéraux ajoutés et d'après le lemme précédent, Def est le seul « endroit » où l'on puisse trouver une clause qui contienne des littéraux ajoutés négatifs.

Supposons que $E \vdash (C'')^*$ avec E contenant deux clauses de Star. Clairement, on ne peut pas directement déduire $(C'')^*$ à partir des clauses qui sont dans E par résolution ordonnée avec sélection car les clauses de E sont des traductions par $*$ et donc ne contiennent que des littéraux positifs. Par définition de \vdash , $(C'')^*$ a donc été déduite à partir de deux clauses qui ne sont pas dans Star. De plus comme les littéraux « ajoutés » n'apparaissent que positivement dans les formules, on a nécessairement fait la coupure sur un littéral P non ajouté. Donc C''^* est de la forme $C^* \sigma \vee C'^* \sigma$ (car $(C \vee C')^* = C^* \vee C'^*$ et $(C\sigma)^* = C^* \sigma$) et les prémisses sont de la forme $C^* \sigma \vee P(t_1) \vee \dots \vee P(t_n)$ et $C'^* \sigma \vee -P(t')$. D'après le lemme 1, une clause ne contient au plus qu'un littéral non ajouté donc la clause auxiliaire est de la forme $C^* \vee P(t)$. D'après le lemme 3, ces deux clauses ont été chacune déduite à partir d'une clause de Star et d'une clause de Def. En regardant comment on pu s'appliquer les règles de résolution ordonnée avec sélection (en utilisant en particulier les définitions de \succ et de sel), on montre que les deux clauses de E sont de la forme $(C \vee_{i_1} + A_1 \vee_{i_2} + A_2 \vee \dots \vee_{i_n} + A_n)^*$ et $(C' \vee_j - A')^*$ et C'' est de la forme $C\sigma \vee C'\sigma$ (des raisonnements du même

type qu'à la question II.1. sont nécessaires pour montrer que σ est un mgu de $\{A_j \doteq A' \ / \ 1 \leq j \leq n\}$.

2.4 Correction et complétude de la lock-résolution

Montrons la complétude de la lock-resolution. Si un ensemble S de clauses n'est pas satisfiable alors $S^* \cup \text{Def}$ n'est pas non plus satisfiable car les clauses de Def peuvent se réécrire $(P^+[i_1](X) \wedge \dots \wedge P^+[i_n](X)) \Rightarrow P(X)$ et $P^-[i](X) \Rightarrow -P(X)$. Donc les clauses de S^* impliquent (en utilisant les clauses de Def), les clauses de S . En particulier, si les clauses de S ne sont pas satisfiables alors on peut en déduire \square donc par transitivité, on peut déduire \square de $S^* \cup \text{Def}$.

Par complétude de la résolution ordonnée avec sélection, il existe une dérivation de $\square = \square^*$ à partir de $S^* \cup \text{Def}$ en utilisant la règle de résolution ordonnée avec sélection. D'après la question précédente cette dérivation peut être vue comme la traduction par $*$ d'une dérivation de \square à partir de S en utilisant des règles de lock-resolution. La lock-resolution est donc complète.

2.5 Incompatibilité avec l'élimination de tautologies

On a les résolutions suivantes. De (2) et (3) on tire $2 + q \vee 4 - q$ et en résolvant avec (5) on obtient $4 - q \vee 8 + p$. De (4) et (5) on tire $6 - p \vee 8 + p$ et en résolvant avec (2) on obtient $2 + q \vee 8 + p$. En résolvant sur cette dernière clauses avec $4 - q \vee 8 + p$, on tire $8 + p$ d'où, en utilisant (3), on a $4 - q$ et avec (4) on obtient $6 - p$. On peut enfin résoudre sur $8 + p$ et $6 - p$ pour obtenir la clause vide \square .

Sur le système initial les seuls couples de clauses sur lesquels on peut résoudre sont (2) et (3), et (4) et (5). Comme nous l'avons vu ci-dessus, ils mènent tous les deux à des tautologies. Il n'y a donc pas de dérivation possible de \square si on élimine systématiquement les tautologies (on perd la complétude).