

## TD n°1 - Correction

### Syntaxe et raisonnement par induction sur les formules

**Exercice 1** [Première induction] Soit  $\phi$  une formule de la logique propositionnelle. On désigne par  $n(\phi)$  le nombre de variables de  $\phi$ , en tenant compte des éventuelles répétitions. Par exemple :

$$n((x_1 \vee x_2)) = n((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Autrement dit,  $n(\phi)$  désigne le nombre d'*occurrences de variables* dans la formule  $\phi$ . Par ailleurs, on désigne par  $p(\phi)$  le nombre de parenthèses dans  $\phi$ . Par exemple

$$p(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad p((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Montrer par induction la propriété suivante :

*Propriété* : toute formule propositionnelle  $\phi \in Form$  vérifie  $n(\phi) - p(\phi) \leq 1$ .

#### Correction :

Par induction. On rappelle que pour prouver par induction que une propriété  $P$  est vraie pour toute formule, on doit montrer que :

1. tout élément de l'ensemble de variables  $\mathcal{V}$  a la propriété  $P$ ,
2. si on suppose que  $\psi$  satisfait  $P$  alors  $\neg\psi$  satisfait  $P$ ,
3. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \wedge \chi)$  satisfait  $P$ ,
4. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \vee \chi)$  satisfait  $P$ ,

Dans cet exercice la propriété  $P$  est «  $n(\phi) - p(\phi) \leq 1$  ». On suit donc le schéma présenté ci-dessus.

– soit  $w \in \mathcal{V}$ . Alors  $n(w) = 1$  et  $p(w) = 0$ . Donc  $w$  a la propriété  $P$ .

– soit  $\psi$  une formule qui vérifie  $P$ . Il s'agit d'une **hypothèse d'induction**, à partir de laquelle nous souhaitons démontrer que  $\neg\psi$  vérifie  $P$ . On a  $n(\neg\psi) = n(\psi)$  et  $p(\neg\psi) = p(\psi)$ .

Par hypothèse d'induction,  $\psi$  vérifie  $P$ , donc  $n(\psi) - p(\psi) \leq 1$ , soit en remplaçant,  $n(\neg\psi) - p(\neg\psi) \leq 1$ . On en déduit que  $\neg\psi$  vérifie  $P$ .

– soient  $\psi, \chi$  deux formules qui vérifient  $P$ . On a  $n(\psi \wedge \chi) = n(\psi) + n(\chi)$  et  $p(\psi \wedge \chi) = p(\psi) + p(\chi) + 2$ . Par ailleurs, comme  $\psi, \chi$  vérifient  $P$ ,  $n(\psi) - p(\psi) \leq 1$  et  $n(\chi) - p(\chi) \leq 1$ .

En sommant ces 2 inégalités, on obtient :

$$n(\psi) + n(\chi) - (p(\psi) + p(\chi)) \leq 2$$

puis

$$n(\psi \wedge \chi) - (p(\psi \wedge \chi) - 2) \leq 2$$

$$n(\psi \wedge \chi) - p(\psi \wedge \chi) \leq 0$$

qui implique  $n(\psi \wedge \chi) - p(\psi \wedge \chi) \leq 1$ . Donc,  $(\psi \wedge \chi)$  vérifie  $P$ .

– On obtient que  $(\psi \vee \chi)$  vérifie  $P$  exactement de la même façon.

**Exercice 2**  $\mathcal{V}$  est un ensemble de variables propositionnelles. On désigne par  $|M|_{(}$  le nombre de parenthèses ouvrantes, par  $|M|_{)}$  le nombre de parenthèses fermantes et par  $|M|_{\neg}$  le nombre signes de négation figurant dans une suite de symboles  $M$  (cf.cours). On appellera également  $|M|$  la longueur de  $M$ .

Montrer par induction la propriété suivante :

*Propriété* : toute formule propositionnelle  $M \in Form$  vérifie  $|M| = |M|_{\neg} + 2|M|_{\langle} + 2|M|_{\rangle} + 1$

**Correction :**

Par induction. On rappelle que pour prouver par induction que une propriété  $P$  est vraie pour toute formule, on doit montrer que :

1. tout élément de  $\mathcal{V}$  a la propriété  $P$ ,
2. si on suppose que  $\psi$  satisfait  $P$  alors  $\neg\psi$  satisfait  $P$ ,
3. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \wedge \chi)$  satisfait  $P$ ,
4. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \vee \chi)$  satisfait  $P$ ,

Dans cet exercice la propriété  $P$  est «  $|M| = |M|_{\neg} + 2|M|_{\langle} + 2|M|_{\rangle} + 1$  ». On suit donc le schéma présenté ci-dessus.

– soit  $w \in \mathcal{V}$ . Alors  $|w|_{\neg} = |w|_{\langle} = |w|_{\rangle} = 0$  et  $|w| = 1$ . Donc  $w$  a la propriété  $P$ .

– soit  $p$  une formule qui vérifie  $P$ . Il s'agit d'une **hypothèse d'induction**, à partir de laquelle nous souhaitons démontrer que  $\neg p$  vérifie  $P$ . On a  $|\neg p|_{\neg} = |p|_{\neg} + 1$ ,  $|\neg p|_{\langle} = |p|_{\langle}$  et  $|\neg p|_{\rangle} = |p|_{\rangle}$ . Par ailleurs,  $|\neg p| = |p| + 1$ .

Par hypothèse d'induction,  $p$  vérifie  $P$ , donc  $|p| = |p|_{\neg} + 2|p|_{\langle} + 2|p|_{\rangle} + 1$ , soit en remplaçant,  $|\neg p| - 1 = |\neg p|_{\neg} - 1 + 2|\neg p|_{\langle} + 2|\neg p|_{\rangle} + 1$ .

On en déduit que  $|\neg p| = |\neg p|_{\neg} + 2|\neg p|_{\langle} + 2|\neg p|_{\rangle} + 1$ , c'est à dire  $\neg p$  vérifie  $P$ .

– soient  $p, q$  deux formule qui vérifient  $P$ . On a  $|(p \wedge q)|_{\neg} = |p|_{\neg} + |q|_{\neg}$ ,  $|(p \wedge q)|_{\langle} = |p|_{\langle} + |q|_{\langle} + 1$ ,  $|(p \wedge q)|_{\rangle} = |p|_{\rangle} + |q|_{\rangle} + 1$  et  $|(p \wedge q)| = |p| + |q| + 3$

Par ailleurs, comme  $p, q$  vérifient  $P$ ,  $|p| = |p|_{\neg} + 2|p|_{\langle} + 2|p|_{\rangle} + 1$  et  $|q| = |q|_{\neg} + 2|q|_{\langle} + 2|q|_{\rangle} + 1$

En sommant ces 2 égalités, on obtient :

$$|p| + |q| = |p|_{\neg} + |q|_{\neg} + 2|p|_{\langle} + 2|q|_{\langle} + 2|p|_{\rangle} + 2|q|_{\rangle} + 2$$

puis

$$\begin{aligned} |(p \wedge q)| &= 3 + |p|_{\neg} + |q|_{\neg} + 2|p|_{\langle} + 2|q|_{\langle} + 2|p|_{\rangle} + 2|q|_{\rangle} + 2 \\ &= 3 + |(p + q)|_{\neg} + 2|(p + q)|_{\langle} - 2 + 2|(p + q)|_{\rangle} - 2 + 2 \\ &= |(p + q)|_{\neg} + 2|(p + q)|_{\langle} + 2|(p + q)|_{\rangle} + 1 \end{aligned}$$

donc  $(p \wedge q)$  vérifie  $P$ .

– On obtient que  $(p \vee q)$  vérifie  $P$  exactement de la même façon.

**Exercice 3** Appelons  $X$  l'ensemble des mots comportant le même nombre de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes (cf.cours :  $X = \{w \mid |w|_{\langle} = |w|_{\rangle}\}$ ). Montrez que l'ensemble  $X$  satisfait les quatre propriétés de clôtures des formules propositionnelles. Est-ce que  $X = Form$ ? Justifiez.

**Correction :**

– Propriété 1 :  $\mathcal{V} \subseteq X$ . Tout élément  $w$  de  $\mathcal{V}$  se trouve dans  $X$ , car  $|w|_{\langle} = |w|_{\rangle} = 0$ .

– Propriété 2 : Soit  $x$  un mot de  $X$ .  $x$  a le même nombre de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes. Il en est donc de même pour  $\neg x$

– Propriétés 3 et 4 : Soit  $\alpha \in \{\wedge, \vee\}$ . Soient  $w_1$  et  $w_2$  des mots de  $X$ .  $|(w_1 \alpha w_2)|_{\langle} = |w_1|_{\langle} + |w_2|_{\langle} + 1$ .

Comme  $|w_1|_{\langle} = |w_1|_{\rangle}$ ,  $|w_2|_{\langle} = |w_2|_{\rangle}$ .  $|w_1|_{\langle} + |w_2|_{\langle} + 1 = |w_1|_{\rangle} + |w_2|_{\rangle} + 1$  donc  $(w_1 \alpha w_2) \in X$

Exemples de mots dans  $X$  et pas dans  $Form$  :  $()$ ,  $(() \wedge p)$ .

**Exercice 4** On définit l'ensemble  $E$  comme le plus petit ensemble de chaînes de caractères tel que

- la chaîne vide  $\epsilon$  appartient à  $E$  (1)
- si  $m \in E$ ,  $(m) \in E$  (2)

On suppose que cet ensemble existe et est bien unique.  
Par ailleurs, on définit également l'ensemble  $F$  :

$$F = \{({}^n)^n | n \in \mathbf{N}\}$$

où  $a^n$  est le caractère  $a$  répété  $n$  fois.

- Montrer que  $F$  satisfait (1) et (2). En déduire que  $E \subseteq F$
- Montrer que  $F \subseteq E$  (pour chaque élément de  $F$ , on montrera qu'il appartient à  $E$  en le construisant explicitement à partir de (1) et (2))
- Conclure

**Correction :**

- Si on prend  $n = 0$  dans la définition de  $F$ , on obtient le mot vide. Donc  $F$  vérifie (1).
- Soit  $m \in F$ . Il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $m = ({}^n)^n$ . Donc on peut écrire  $(m) = (({}^n)^n) = ({}^{n+1})^{n+1} \in F$ . Donc  $F$  vérifie (2).
- $E$  étant le plus petit ensemble vérifiant (1) et (2), on a donc bien  $E \subset F$ .
- Soit  $m \in F$ .  $m = ({}^n)^n$  pour un certain  $n$ . La règle (1) nous dit que le mot vide appartient à  $E$ . La règle (2) appliquée  $n$  fois nous dit que le mot  $({}^n)^n = m$  appartient à  $E$ . Donc  $F \subset E$ .
- On déduit des deux points précédents que  $F = E$ .

**Exercice 5** Donner la définition par récurrence de la fonction qui renvoie le nombre de conjonctions d'une formule. Montrer par induction que pour toute formule propositionnelle, le nombre de parenthèses ouvrantes est plus grand que le nombre de conjonctions.

**Correction :** La fonction  $\text{nbconj}$  est définie comme suit :

1.  $\text{nbconj}(x) = 0$  si  $x \in V$
2.  $\text{nbconj}(\neg p) = \text{nbconj}(p)$
3.  $\text{nbconj}((p \wedge q)) = 1 + \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$
4.  $\text{nbconj}((p \vee q)) = \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$

La propriété  $P$  qu'on doit prouver est  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$ , pour toute formule propositionnelle  $p$  :

- soit  $x \in V$ . Alors  $\text{nbconj}(x) = 0 = |x|_{\zeta}$ . Donc  $x$  a la propriété  $P$ .
- soit  $p$  une formule qui vérifie  $P$ . On a que  $\text{nbconj}(\neg p) = \text{nbconj}(p)$  et  $|\neg p|_{\zeta} = |p|_{\zeta}$ . L'hypothèse d'induction dit que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$ . Donc,  $\text{nbconj}(\neg p) \leq |\neg p|_{\zeta}$ , c'est à dire  $\neg p$  vérifie  $P$ .
- soit  $p$  et  $q$  deux formules qui vérifient  $P$ . Par définition,  $\text{nbconj}((p \wedge q)) = 1 + \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$  et  $|(p \wedge q)|_{\zeta} = 1 + |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$ . Par l'hypothèse d'induction, on a que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$  et  $\text{nbconj}(q) \leq |q|_{\zeta}$ . En sommant ces 2 inégalités, on obtient  $\text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q) \leq |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$  qui implique  $\text{nbconj}((p \wedge q)) \leq |(p \wedge q)|_{\zeta}$ . Donc,  $(p \wedge q)$  vérifie  $P$ .
- soit  $p$  et  $q$  deux formules qui vérifient  $P$ . Par définition,  $\text{nbconj}((p \vee q)) = \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$  et  $|(p \vee q)|_{\zeta} = 1 + |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$ . Par l'hypothèse d'induction, on a que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$  et  $\text{nbconj}(q) \leq |q|_{\zeta}$ . En sommant ces 2 inégalités, on obtient  $\text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q) \leq |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$  qui implique  $\text{nbconj}((p \vee q)) \leq |(p \vee q)|_{\zeta}$ . Donc,  $(p \vee q)$  vérifie  $P$ .

**Exercice 6** [Facultatif] Pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , on construit l'ensemble de mots  $F_i$  de la façon suivante :

- Si  $i = 0$ , on pose  $F_0 = \mathcal{V}$
- Si  $i > 0$ , on pose  $F_i = \neg F_{i-1} \cup (F_{i-1} \wedge F_{i-1}) \cup (F_{i-1} \vee F_{i-1}) \cup F_{i-1}$

où

$$\begin{aligned} \neg F_{i-1} &= \{\neg f | f \in F_{i-1}\} \\ (F_{i-1} \wedge F_{i-1}) &= \{(f_1 \wedge f_2) | f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\} \\ (F_{i-1} \vee F_{i-1}) &= \{(f_1 \vee f_2) | f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\} \end{aligned}$$

puis

$$F = \bigcup_{i \geq 0} F_i \quad (1)$$

Donnez quelques exemples de formules dans  $F_1$  et  $F_2$ .

Montrer que  $F$  vérifie les propriétés de clôture des formules propositionnelles :

- si  $f \in V$ , alors  $f \in F$
- si  $f \in F$ , alors  $\neg f \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \wedge f_2) \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \vee f_2) \in F$

En déduire que  $Form \subseteq F$ .

Montrer également que  $F \subseteq Form$ .

**Correction :** Il faut commencer par une observation : pour tout  $i, j$ , si  $i \leq j$  alors  $F_i \subseteq F_j$ . On prouve cela par induction sur  $i - j$ . Si  $j = i$  alors  $F_i = F_j$  et donc  $F_i \subseteq F_j$ . Supposons que  $F_i \subseteq F_{i+n}$ . Par définition  $F_{i+n+1} = \neg F_{i+n} \cup (F_{i+n} \wedge F_{i+n}) \cup (F_{i+n} \vee F_{i+n}) \cup F_{i+n}$ . En particulier  $F_{i+n} \subseteq F_{i+n+1}$ . Donc  $F_i \subseteq F_{i+n} \subseteq F_{i+n+1}$ .

Maintenant on montre que  $Form \subseteq F$  :

- si  $f \in V$ , alors  $f \in F_0$  et donc  $f \in F$ .
- si  $f \in F$ , alors il existe  $i$  tel que  $f \in F_i$  donc  $\neg f \in F_{i+1}$  et donc  $\neg f \in F$ .
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors ils existent  $i_1$  et  $i_2$  tels que  $f_1 \in F_{i_1}$  et  $f_2 \in F_{i_2}$ . *Sans perte de généralité* on suppose que  $i_1 \leq i_2$ . Par l'observation précédente on a  $F_{i_1} \subseteq F_{i_2}$ . Donc  $f_1, f_2 \in F_{i_2}$ . Par définition  $(f_1 \wedge f_2), (f_1 \vee f_2) \in F_{i_2+1}$  et donc  $(f_1 \wedge f_2), (f_1 \vee f_2) \in F$ .

Du fait que  $Form$  est le plus petit ensemble qui satisfait ces propriétés de clôture, on conclut  $Form \subseteq F$ . Pour prouver que  $F \subseteq Form$ , on prouve par induction sur  $i$  que pour tout  $i$ ,  $F_i \subseteq Form$ . On laisse les détails au lecteur.