

## TD n°2 - Correction

### Sémantique

**Exercice 1** [Preuve de la Proposition 2] Soit  $p$  une formule propositionnelle et  $v_1, v_2$  des affectations telles que  $v_1(x) = v_2(x)$  pour toute variable  $x \in \mathcal{V}(p)$ . Montrer que  $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$ .

**Correction :** Reformulons d'abord la définition de  $\llbracket p \rrbracket_v$ . On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} NON &: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \\ ET &: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \\ OU &: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \end{aligned}$$

définies selon les tables de vérité de la négation, de la conjonction et de la disjonction.

Alors la définition de  $\llbracket p \rrbracket_v$  par induction sur la formule  $p$  peut s'exprimer ainsi :

- $\llbracket x \rrbracket_v = v(x)$
- $\llbracket \neg p \rrbracket_v = NON(\llbracket p \rrbracket_v)$ ,
- $\llbracket (p \wedge q) \rrbracket_v = ET(\llbracket p \rrbracket_v, \llbracket q \rrbracket_v)$ ,
- $\llbracket (p \vee q) \rrbracket_v = OU(\llbracket p \rrbracket_v, \llbracket q \rrbracket_v)$ .

Par exemple,  $\llbracket (\neg x \wedge y) \vee z \rrbracket_v = OU(ET(NON(v(x)), v(y)), v(z))$ . Attention :  $\neg, \wedge, \vee$  sont des objets *syntactiques* tandis que  $NON, ET, OU$  sont des fonctions mathématiques, c'est-à-dire des objets *sémantiques*.

On prouve maintenant l'exercice 1 par induction. On fixe deux affectations quelconques  $v_1, v_2$ . On définit la propriété  $P(p)$  : si  $v_2(x) = v_1(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(p)$ , alors  $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$ .

1. soit  $p$  une variable  $z$ . Par définition,  $\llbracket z \rrbracket_{v_1} = v_1(z)$ . Si  $v_2(x) = v_1(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(p)$ , puisque  $z \in \mathcal{V}(p)$ , on a  $v_2(z) = v_1(z)$ . Donc  $\llbracket z \rrbracket_{v_1} = \llbracket z \rrbracket_{v_2}$ .
2. soit  $p$  de la forme  $\neg q$ . Supposons que  $v_2(x) = v_1(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(p)$ . On observe que  $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(q)$ . Par hypothèse d'induction on a donc  $\llbracket q \rrbracket_{v_1} = \llbracket q \rrbracket_{v_2}$ . Alors

$$\begin{aligned} \llbracket \neg q \rrbracket_{v_1} &= NON(\llbracket q \rrbracket_{v_1}) \\ &\parallel \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ \llbracket \neg q \rrbracket_{v_2} &= NON(\llbracket q \rrbracket_{v_2}) \end{aligned}$$

3. soit  $p$  de la forme  $q \wedge r$ . Supposons que  $v_2(x) = v_1(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(p)$ . On observe que  $\mathcal{V}(p) \supseteq \mathcal{V}(q)$  et  $\mathcal{V}(p) \supseteq \mathcal{V}(r)$ . On a donc que  $v_2(x) = v_1(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(q)$  et pour tout  $x \in \mathcal{V}(r)$ . Par hypothèse d'induction on a  $\llbracket q \rrbracket_{v_1} = \llbracket q \rrbracket_{v_2}$  et  $\llbracket r \rrbracket_{v_1} = \llbracket r \rrbracket_{v_2}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \llbracket (q \wedge r) \rrbracket_{v_1} &= ET(\llbracket q \rrbracket_{v_1}, \llbracket r \rrbracket_{v_1}) \\ &\parallel \quad \parallel \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ \llbracket (q \wedge r) \rrbracket_{v_2} &= ET(\llbracket q \rrbracket_{v_2}, \llbracket r \rrbracket_{v_2}) \end{aligned}$$

4. le cas de la disjonction est complètement analogue.

Cela prouve par induction que pour ces deux affectations fixées  $v_1, v_2$  telles que  $v_1(x) = v_2(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(p)$  et pour toute formule  $p$ ,  $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$ . Mais les deux affectations sont deux affectations quelconques, donc cette propriété est vraie pour toute paire d'affectations  $v_1, v_2$  telles que  $v_2$  étend  $v_1$ . Cela conclut notre preuve.

**Exercice 2** [Preuve du théorème 4.2 du cours] Montrez qu'une formule  $p$  est valide si et seulement si  $v \models p$  pour toute affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ .

**Correction :** Deux méthodes :

1. – Le théorème 4.1 du cours appliqué à  $\neg p$  nous donne l'équivalence suivante : la formule  $\neg p$  est satisfiable si et seulement si il existe une affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p)$  telle que  $v \models \neg p$  (qui équivaut à  $v \not\models p$ ).
  - Mais  $\neg p$  est satisfiable si et seulement  $p$  n'est pas valide (Proposition 1).
  - Donc on a l'équivalence :  $p$  n'est pas valide si et seulement si il existe une affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$  telle que  $v \not\models p$ .
  - On prend la négation de l'équivalence au dessus :  $p$  est valide si et seulement si pour toute affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ , on a  $v \models p$ .
2. Preuve directe. Si  $p$  est valide, par définition, pour toute affectation  $v$  on a  $v \models p$ . En particulier, c'est vrai pour toute affectation  $v$  telle que  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ .  
Réciproquement, supposons que pour tout  $v$  telle que  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$  on a  $v \models p$ . Soit  $w$  une affectation quelconque. On définit une affectation  $v$  comme suit :

$$v(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in \mathcal{V}(p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais d'après la Proposition 2 (Exercice 1), puisque  $v \models p$  et  $v(x) = w(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}(x)$ , on a aussi  $w \models p$  ce qui conclut la preuve.

**Definition 1** Soient  $p$  et  $q$  des formules propositionnelles.

- On dit que  $q$  est une *conséquence* de  $p$ , et on écrit  $p \models q$ , si pour toute affectation  $v$  telle que  $v \models p$  on a aussi que  $v \models q$ .
- On dit que  $p$  et  $q$  sont *équivalentes*, et on écrit  $p \models q$ , si  $p \models q$  et  $q \models p$ .

Parfois on s'intéresse aussi à la notion de conséquence de tout un ensemble de formules :

**Definition 2** Soient  $p \in \text{Form}$  une formule et  $T \subseteq \text{Form}$  un ensemble de formules. On dit que  $p$  est une *conséquence* de  $T$ , noté  $T \models p$ , si pour toute affectation  $v$  telle que  $v \models q$  pour tout  $q \in T$  on a aussi que  $v \models p$ .

- Exercice 3**
1. Montrer que  $\{q\} \models p$  ssi  $q \models p$
  2. Montrer que si  $T \models p$  et  $T \subseteq S$  alors  $S \models p$
  3. Qu'est-ce que ça veut dire que  $\emptyset \models p$ ?

**Correction :** Les deux premiers sont une facile conséquence des définitions. Si  $\emptyset \models p$ , par définition on a que pour toute affectation  $v$ , si  $v$  satisfait toutes les formules de  $\emptyset$ , alors  $v$  satisfait  $p$ . Mais il n'y a pas de formules dans  $\emptyset$ , donc n'importe quelle  $v$  satisfait toutes les formules de  $\emptyset$ . Et donc n'importe quelle  $v$  satisfait  $p$ . Cela signifie que  $p$  est valide.

**Exercice 4** Soient  $q_1, q_2$  deux formules telles que  $q_1 \models q_2$ ,  $x_1, \dots, x_n$  des variables propositionnelles différentes, et  $p_1, \dots, p_n$  des formules propositionnelles. Alors

$$q_1[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n] \models q_2[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]$$

**Correction :**