

TD n°3 - Correction

Systemes de connecteurs

Rappel sur la notion de complétude d'un ensemble de connecteurs introduite en cours. On peut formaliser cette question comme suit : Un ensemble de connecteurs est complet si pour tout nombre naturel n , et pour toute fonction f

$$f: \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n \text{ fois}} \rightarrow \{0, 1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle p , avec $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ qui « réalise » f , c'est-à-dire telle que

$$\llbracket p \rrbracket [x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$.

Exercice 1 1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont fonctionnellement complets.

2. Montrer que $\{\rightarrow, \neg\}$ et $\{\rightarrow, \oplus\}$ sont fonctionnellement complets.

Correction :

1. On doit utiliser les lois de de Morgan et le fait que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complet.
2. Il suffit d'observer que $\neg\phi \models \phi \rightarrow (\phi \oplus \phi)$, et que $\{\rightarrow, \neg\}$ est fonctionnellement complet.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble de connecteurs $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complet. Pour cela vous devez trouver un entier n et une fonction f de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$, telle qu'il n'y a pas de formule p construite avec \wedge et \vee , telle que

$$\llbracket p \rrbracket [x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes valeurs booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$. Pour prouver qu'une telle formule n'existe pas, on raisonnera par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement avec \wedge et \vee .

Correction : Soit $n = 1$ et soit f la fonction constante unaire qui à x associe 0 quelque soit x .

Montrons qu'il n'existe pas de formule p construite uniquement avec \wedge et \vee qui réalise cette fonction, c'est à dire qui compte au plus une variable propositionnelle et telle que, quelle que soit v une affectation on a $\llbracket p \rrbracket_v = 0$.

Pour cela nous allons montrer que quelle que soit la formule p que l'on construit, si elle ne comporte que des \vee et des \wedge alors pour toute affectation v $\llbracket p \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$. Nous en déduisons que pour l'affectation v_1 qui à x associe 1, $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = 1$ pour toute formule p .

- Cas de base : Soit p est une formule propositionnelle. Alors p est forcément de la forme x Donc pour toute affectation v $\llbracket p \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$ puisque $p = x$.
- Soit p est de la forme $(q \vee r)$. Dans ce cas, par hypothèse d'induction, on sait que si $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$ et $\llbracket r \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v(1)$. Par définition l'interprétation d'une formule, si $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket r \rrbracket_v$ alors $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket r \rrbracket_v = \llbracket (q \vee r) \rrbracket_v(2)$. En effet soit $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket p \rrbracket_v = 1$ et dans ce cas $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = 1$. Soit $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket p \rrbracket_v = 0$ et dans ce cas $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = 0$. Nous concluons de (1) et (2) que $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$.

- Soit p est de la forme $(q \wedge r)$. Dans ce cas nous raisonnons de manière analogue.

De là nous concluons qu'il n'est pas possible d'exprimer toutes les fonctions avec seulement les connecteurs \wedge et \vee .

Exercice 3 Montrer que $\{\neg, \leftrightarrow\}$ n'est pas fonctionnellement complet. Pour cela il s'agira de montrer par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement grâce à \neg et \leftrightarrow , que pour toute formule comportant deux variables propositionnelles, le nombre d'affectations qui la satisfont est toujours pair.

Correction : Là encore pour montrer qu'un système n'est pas complet, il suffit d'exhiber une arité n et une formule f de cette arité telle que cette formule n'est pas exprimable par ce système de connecteurs. Nous prétendons que l'ensemble des fonctions ayant une arité 2 et qui sont satisfaites par un nombre impair d'affectations n'est pas exprimable.

Nous montrons par induction pour toutes formules construites uniquement avec \neg et \leftrightarrow que le nombre d'affectations qui la satisfont est pair. Nous remarquerons que des connecteurs comme le \vee ou le \wedge ne sont pas exprimable.

- Cas de base $p = x$ pour $x \in \{x_1, x_2\}$ une variable propositionnelle. Il nous suffit de constater qu'il y a en tous deux affectations qui satisfont p . Ce sont les deux affectations qui satisfont x .
- p est de la forme $\neg q$. Par hypothèse d'induction q est satisfaite par un nombre pair d'affectations. Comme le nombre total d'affectations est paire. Alors le nombre d'affectations v telle que $\llbracket q \rrbracket_v = 0$ est pair. Donc par définition de l'interprétation d'une formule, les affectations qui rendent q fausse rendent p vraie. On conclue donc que ce nombre d'affectations est pair.
- p est de la forme $(q \leftrightarrow r)$. On note n_q , resp. n_r le nombre d'affectations qui font q , resp. r vraies. Par hypothèse d'induction, le nombre n_q et le nombre n_r sont pairs. De plus, on note

$n_{q,r}$	nombre d'affectations qui font q vraie et r vraie
$n_{\neg q,r}$	nombre d'affectations qui font q fausse et r vraie
$n_{q,\neg r}$	nombre d'affectations qui font q vraie et r fausse
$n_{\neg q,\neg r}$	nombre d'affectations qui font q fausse et r fausse

La formule $q \leftrightarrow r$ est vraie ssi soit q est vraie et r est vraie, soit q et fausse et r est fausse. On a donc que pour le nombre d'affectations qui font $q \leftrightarrow r$ vraie :

$$n_{q \leftrightarrow r} = n_{q,r} + n_{\neg q,\neg r}$$

Or, on a que

$$\begin{aligned} n_{q,r} + n_{q,\neg r} &= n_q \\ n_{q,\neg r} + n_{\neg q,\neg r} &= 4 - n_r \end{aligned}$$

La somme de deux nombres est pair si et seulement si les deux nombres ont la même parité (pair ou impair). Par hypothèse d'induction, n_q et n_r sont pairs. Par conséquence, $n_{q,r}$ et $n_{q,\neg r}$ ont la même parité, et aussi $n_{q,\neg r}$ et $n_{\neg q,\neg r}$ ont la même parité. Donc, $n_{q,r}$ et $n_{\neg q,\neg r}$ ont la même parité, leur somme $n_{q \leftrightarrow r}$ est alors paire.

Exercice 4 Montrer que l'opérateur \uparrow est fonctionnellement complet.

Correction : On sait grâce au cours que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ est fonctionnellement complet. Donc, par définition, pour tout entier naturel n et pour toute fonction $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ on a une formule propositionnelle p , avec $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ telle que

$$\llbracket p \rrbracket [x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$.

Il suffit donc de montrer que pour toute formule propositionnelle p , avec $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, il existe une formule propositionnelle q engendrée à partir du seul connecteur \uparrow telle que $q \models p$ avec $\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(p)$. On aura alors d'après le cours que

$$\llbracket q \rrbracket [x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = \llbracket p \rrbracket [x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n]$$

ce qui prouvera que \uparrow est fonctionnellement complet si $\{\neg, \vee, \wedge\}$ l'est également.

Soit $Form_{\uparrow}$ l'espace engendré par le connecteur \uparrow , c'est-à-dire le plus petit ensemble tel que $V \subset Form_{\uparrow}$ et si $p, q \in Form_{\uparrow}$ alors $p \uparrow q \in Form_{\uparrow}$.

Montrons donc par induction que pour toute formule propositionnelle $p \in Form$, il existe une formule $q \in Form_{\uparrow}$ telle que $p \models q$ et $\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(p)$.

– $x \in V$:

On a $x \models x$ et $x \in V \subset Form_{\uparrow}$ et $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(x) = \{x\}$

– $\neg p$:

Par hypothèse, on a $p' \in Form_{\uparrow}$ telle que $p \models p'$, et $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(p')$.

Or $\neg p \models \neg(p \wedge p) \models \neg(p' \wedge p') = p' \uparrow p'$ et on a bien $\mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(p') = \mathcal{V}(p' \uparrow p')$.

– $p \vee q \in Form$:

Par hypothèse, on a $p', q' \in Form_{\uparrow}$ telles que $p \models p'$, $q \models q'$, $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(p')$, $\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(q')$.

Or $p \vee q \models \neg(\neg p \wedge \neg q) \models \neg(\neg(p \wedge p) \wedge \neg(q \wedge q)) \models \neg(\neg(p' \wedge p') \wedge \neg(q' \wedge q')) = (p' \uparrow p') \uparrow (q' \uparrow q')$
et on a bien $\mathcal{V}(p \vee q) = \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(p') \cup \mathcal{V}(q') = \mathcal{V}((p' \uparrow p') \uparrow (q' \uparrow q'))$.

– $p \wedge q \in Form$:

De même on montre que $p \wedge q \models (p' \uparrow q') \uparrow (p' \uparrow q')$ avec $\mathcal{V}(p \wedge q) = \mathcal{V}((p' \uparrow q') \uparrow (p' \uparrow q'))$.