

TD n°3

Systemes de connecteurs

Rappel sur la notion de complétude d'un ensemble de connecteurs introduite en cours. On peut formaliser cette question comme suit : Un ensemble de connecteurs est complet si pour tout nombre naturel n , et pour toute fonction f

$$f: \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n \text{ fois}} \rightarrow \{0, 1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle p , avec $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ qui « réalise » f , c'est-à-dire telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$.

Exercice 1 1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont fonctionnellement complets.

2. Montrer que $\{\rightarrow, \neg\}$ et $\{\rightarrow, \oplus\}$ sont fonctionnellement complets.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble de connecteurs $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complet. Pour cela vous devez trouver un entier n et une fonction f de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$, telle qu'il n'y a pas de formule p construite avec \wedge et \vee , telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes valeurs booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$. Pour prouver qu'une telle formule n'existe pas, on raisonnera par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement avec \wedge et \vee .

Exercice 3 Montrer que $\{\neg, \leftrightarrow\}$ n'est pas fonctionnellement complet. Pour cela il s'agira de montrer par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement grâce à \neg et \leftrightarrow , que pour toute formule comportant deux variables propositionnelles, le nombre d'affectations qui la satisfont est toujours pair.

Exercice 4 Montrer que l'opérateur \uparrow est fonctionnellement complet.