Université Paris Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2011-2012

TD n°4 - Correction

Modélisation et formes normales

Exercice 1 [Modélisation]

1. On veut prendre une photo de groupe avec Marie, Sofine, Pawel, et Kim. Pour prendre la photo, les personnes sont à placer sur une ligne, une à côté de l'autre. Marie veut absolument être placée à côté de Pawel et à côté de Kim, et Kim veut absolument être placé à côté de Sofine. Sofine et Pawel n'ont pas exprimé une préférence.

   Construire une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un tel placement existe. Vous avez le droit d'écrire une formule qui n'est pas en forme conjonctive normale. Procéder en deux temps : construire d'abord une formule qui correspond à un placement des quatre personnes sur une ligne, puis une deuxième formule qui exprime qui doit être placé à côté de qui.

2. On généralise maintenant le problème de la question (1) : On a donné un groupe G de n personnes, et une fonction v qui donne pour chaque personne du groupe un ensemble de voisins demandés (qui peut être vide). Pour l'exemple de la question (1) on aurait

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ G &= \{\text{Marie}, \text{Sofine}, \text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Marie}) &= \{\text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Kim}) &= \{\text{Sofine}\} \\ v(\text{Sofine}) = v(\text{Pawel}) &= \emptyset \end{aligned}$$

   Donner la construction générale de la formule propositionnelle qui est vraie si et seulement un placement des personnes existe qui satisfait tous les souhaits.

Correction : Pour l'exemple : Une variable est une paire d'un nom et d'une place. On a donc 16 variables. La formule qui décrit un placement :

$$\begin{array}{ll} & ([M,1] \vee [M,2] \vee [M,3] \vee [M,4]) \\ \wedge & ([C,1] \vee [C,2] \vee [C,3] \vee [C,4]) \\ \wedge & ([P,1] \vee [P,2] \vee [P,3] \vee [P,4]) \\ \wedge & ([J,1] \vee [J,2] \vee [J,3] \vee [J,4]) \\ \wedge & (\neg[M,1] \vee \neg[M,2]) \wedge (\neg[M,1] \vee \neg[M,3]) \wedge (\neg[M,1] \vee \neg[M,4]) \wedge (\neg[M,2] \vee \neg[M,3]) \wedge (\neg[M,2] \vee \neg[M,4]) \wedge (\neg[M,3 \\ \wedge & (\neg[C,1] \vee \neg[C,2]) \wedge (\neg[C,1] \vee \neg[C,3]) \wedge (\neg[C,1] \vee \neg[C,4]) \wedge (\neg[C,2] \vee \neg[C,3]) \wedge (\neg[C,2] \vee \neg[C,4]) \wedge (\neg[C,3] \vee \neg[C \\ \wedge & (\neg[P,1] \vee \neg[P,2]) \wedge (\neg[P,1] \vee \neg[P,3]) \wedge (\neg[P,1] \vee \neg[P,4]) \wedge (\neg[P,2] \vee \neg[P,3]) \wedge (\neg[P,2] \vee \neg[P,4]) \wedge (\neg[P,3] \vee \neg[P, \\ \wedge & (\neg[J,1] \vee \neg[J,2]) \wedge (\neg[J,1] \vee \neg[J,3]) \wedge (\neg[J,1] \vee \neg[J,4]) \wedge (\neg[J,2] \vee \neg[J,3]) \wedge (\neg[J,2] \vee \neg[J,4]) \wedge (\neg[J,3] \vee \neg[J,4]) \end{array}$$

Puis pour les contraintes :

$$\begin{array}{ll} & \Big[([P,1] \wedge [M,2] \wedge [J,3]) \vee ([P,3] \wedge [M,2] \wedge [J,1]) \vee ([P,2] \wedge [M,3] \wedge [J,4]) \vee ([P,4] \wedge [M,3] \wedge [J,2])\Big] \\ \wedge & \Big[([C,1] \wedge [J,2]) \vee ([C,2] \wedge [J,3]) \vee ([C,3] \wedge [J,4]) \vee ([J,1] \wedge [C,2]) \vee ([J,2] \wedge [C,3]) \vee ([J,3] \wedge [C,4])\Big] \end{array}$$

Dans le cas général :

$$\begin{array}{ll} & \bigwedge_{p\in G} \bigvee_{1\le i\le n} [p,i] \wedge \bigwedge_{p\in G} \bigwedge_{1\le i<n} \bigwedge_{i<j\le n} \neg([p,i]\wedge[p,j]) \\ \wedge & \bigwedge_{v(p)=\{q\}} \bigvee_{1\le i<n} ([p,i]\wedge[q,i+1]) \vee ([q,i]\wedge[p,i+1]) \\ \wedge & \bigwedge_{v(p)=\{q,r\}} \bigvee_{1<i<n} ([q,i-1]\wedge[p,i]\wedge[r,i+1]) \vee ([r,i-1]\wedge[p,i]\wedge[q,i+1]) \\ \wedge & \bigwedge_{card(p)>2} \texttt{false} \end{array}$$

Exercice 2 Ahmed, Bruno, Chen et Dimitri habitent le même batiment dans quatre étages différents. Tous ont un animal différent. Ahmed n'aime pas les chats, Chen habite juste au dessous de Bruno. Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée. Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au dessous de l'autre. Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno. Exprimez ces contraintes en logique propositionnelle et dites qui a le serin.

Correction : La variable $x_{A,2}$ signifie que Ahmed habite au deuxième étage. La variable $y_{B,l}$ signifie que Bruno a un lapin

Toute personne habite quelque part :

$$H_X = \bigvee_{1\le i\le 4} x_{X,i}$$

Toute personne habite dans un seul appartement :

$$H1_X = \bigwedge_{1\le i\le 4} (x_{X,i} \rightarrow \bigwedge_{h\neq i} \neg x_{X,h})$$

Tout appartement a une personne :

$$App_i = \bigvee_{X=A,B,C,D} x_{X,i}$$

Toute personne a un animal :

$$A_X = \bigvee_{a=c,l,p,s} y_{X,a}$$

Toute personne a un seul animal :

$$AU_X = \bigwedge_{a=c,l,p,s} (y_{X,a} \rightarrow \bigwedge_{b\neq a} \neg y_{X,b})$$

Tout animal a une personne :

$$An_a = \bigvee_{X=A,B,C,D} y_{X,a}$$

Ahmed n'aime pas les chats : $\neg y_{A,c}$.
Chen habite juste au dessous de Bruno :

$$\bigvee_{1\le i\le 3} (x_{C,i} \wedge x_{B,i+1})$$

Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée :

$$\bigwedge_{X=A,B,C,D} (y_{X,p} \rightarrow x_{X,1})$$

Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au dessous de l'autre :

$$\bigwedge_{1\leq i\leq 3}(x_{D,i}\rightarrow\neg x_{A,i+1})\wedge\bigwedge_{1\leq i\leq 3}(x_{A,i}\rightarrow\neg x_{D,i+1})$$

Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno :

$$\bigwedge_{1\leq i\leq 3}\bigwedge_{X=A,B,C,D}((y_{X,l}\wedge x_{B,i})\rightarrow\bigvee_{j>i}x_{X,j})$$

Qui a le serin ? Chen et Bruno habitent juste en dessous de l'autre et Ahmed et Dimitri sont séparés par au moins une personne, donc Ahmed et Dimitri logent aux étages 1 et 4, Chen occupe le deuxième étage et Bruno le troisième. Celui qui occupe le quatrième a donc le lapin et celui qui occupe l'étage 1 a le poisson. C'est donc Bruno ou Chen qui ont le serin.

Exercice 3 [Petit problème de synthèse] Un coffre fort est muni de n serrures et peut être ouvert lorsque ces n serrures sont ouvertes simultanément. Cinq personnes : a ,b, c, d, et e doivent recevoir des clefs correspondant a certaines de ces serrures. Chaque clef peut être disponible en autant d'exemplaires que l'on souhaite.

Choisissez pour n la plus petite valeur possible, et associez lui une répartition des clefs entre les cinq personnes, de manière a ce que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans au moins l'une des situations suivantes :

- présence simultanée de a et de b ;
- présence simultanée de a, c et d ;
- présence simultanée de b, d et e.

Correction : On se donne P un ensemble de 5 variables propositionnelles $P=\{A,B,C,D,E\}$. On considérera qu'une variable propositionnelle A (resp B,C,D,E) est satisfaite si et seulement si a, (resp b,c,d,e), est présente. D'après ce qui est décrit dans l'énoncé (en exprimant cela sous forme de la satisfaction d'une formule), on veut que « le coffre puisse être ouvert »si et seulement si la formule $\phi=(A\wedge B)\vee(A\wedge C\wedge D)\vee(B\wedge D\wedge E)$ est satisfaite.

Par ailleurs, considérons l'ensemble $\{S_1\ldots S_n\}$ des serrures. Le coffre ne peut être ouvert que si pour tout indice i, l'un au moins des détenteurs est présent. En d'autres termes pour chaque serrures S_i le coffre ne peut être ouvert que si une au moins des variables propositionnelles de P est satisfaite. On peut donc exprimer cela par une disjonction. Par exemple si c et e ont la clef S_1 alors l'ouverture de S_1 équivaut a la satisfaction de $C\vee E$ c'est à dire à la présence d'au moins l'une des deux personnes c ou e. Puisque pour ouvrir le coffre, il faut que toutes les serrures soient ouvertes, on peut donc exprimer cette ouverture par une conjonction de ces disjonctions (c'est à dire une formule en forme normale disjonctive). Le nombre de disjonctions nous indique le nombre de serrures.

On remarque ensuite que l'ouverture du coffre par la présence d'au moins un détenteur de clef par serrures doit être équivalent a la formule ϕ. Le problème est que ϕ n'est pas en FNC. Il faut donc la transformer en FNC.

Après avoir opéré cette transformation, on obtient la formule ψ équivalente à ϕ

$$\psi=(A\vee B)\wedge(A\vee D)\wedge(A\vee E)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)$$

. On en conclut qu'il faut au moins cinq serrures.

Cette formule indique en plus les possibilités pour répartir les clefs.

- a possède la clef de S_1, S_2,S_3
- b possède la clef de S_1, S_4,S_5
- c possède la clef de S_4
- d possède la clef de S_2,S_5
- e possède la clef de S_3

Exercice 4 [Echauffement 1] Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.
- $\neg(\neg x \vee y)$
- $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$

Correction : Pas trop dur...

Exercice 5 [Echauffement 2] Déterminez une forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :
- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
- $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Correction : On donne ici une solution possible. On rappelle qua la forme normale n'est pas unique en général.
- FND $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
  FNC $= (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- FNC et FND $= q \vee \neg p$
- FNC et FND $= \neg p \vee \neg q$

Exercice 6 [Preuve du théorème 15] Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe une variable x telle que la clause d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.

Correction : Notre formule $(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$ est valide si et seulement si la formule équivalente $\neg(\neg d_1 \vee \neg d_2 \vee \ldots \vee \neg d_n)$ l'est aussi. Et par suite, elle est valide si et seulement si $(\neg d_1 \vee \neg d_2 \vee \ldots \vee \neg d_n)$ une formule en forme disjonctive normale, n'est pas satisfaisable. En appliquant le théorème 11, on peut conclure que toute les clauses $c_i = \neg d_i$ contiennent à la fois la variable x et sa négation $\neg x$.