Université Paris Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2011-2012

TD n°4

Modélisation et formes normales

Exercice 1 [Modélisation]

1. On veut prendre une photo de groupe avec Marie, Sofine, Pawel, et Kim. Pour prendre la photo, les personnes sont à placer sur une ligne, une à côté de l'autre. Marie veut absolument être placée à côté de Pawel et à côté de Kim, et Kim veut absolument être placé à côté de Sofine. Sofine et Pawel n'ont pas exprimé une préférence.

   Construire une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un tel placement existe. Vous avez le droit d'écrire une formule qui n'est pas en forme conjonctive normale. Procéder en deux temps : construire d'abord une formule qui correspond à un placement des quatre personnes sur une ligne, puis une deuxième formule qui exprime qui doit être placé à côté de qui.

2. On généralise maintenant le problème de la question (1) : On a donné un groupe G de n personnes, et une fonction v qui donne pour chaque personne du groupe un ensemble de voisins demandés (qui peut être vide). Pour l'exemple de la question (1) on aurait

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ G &= \{\text{Marie}, \text{Sofine}, \text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Marie}) &= \{\text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Kim}) &= \{\text{Sofine}\} \\ v(\text{Sofine}) = v(\text{Pawel}) &= \emptyset \end{aligned}$$

   Donner la construction générale de la formule propositionnelle qui est vraie si et seulement un placement des personnes existe qui satisfait tous les souhaits.

Exercice 2 Ahmed, Bruno, Chen et Dimitri habitent le même batiment dans quatre étages différents. Tous ont un animal différent. Ahmed n'aime pas les chats, Chen habite juste au dessous de Bruno. Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée. Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au dessous de l'autre. Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno. Exprimez ces contraintes en logique propositionnelle et dites qui a le serin.

Exercice 3 [Petit problème de synthèse] Un coffre fort est muni de n serrures et peut être ouvert lorsque ces n serrures sont ouvertes simultanément. Cinq personnes : a ,b, c, d, et e doivent recevoir des clefs correspondant a certaines de ces serrures. Chaque clef peut être disponible en autant d'exemplaires que l'on souhaite.

Choisissez pour n la plus petite valeur possible, et associez lui une répartition des clefs entre les cinq personnes, de manière a ce que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans au moins l'une des situations suivantes :

- présence simultanée de a et de b ;
- présence simultanée de a, c et d ;

– présence simultanée de b, d et e.

Exercice 4 [Echauffement 1] Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.
- $\neg(\neg x \vee y)$
- $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$

Exercice 5 [Echauffement 2] Déterminez une forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :
- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
- $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Exercice 6 [Preuve du théorème 15] Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe une variable x telle que la clause d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.