

TD n°5 - Correction

Satisfaisabilité des CNF et algorithme DPLL

Exercice 1 Montrer la Proposition 7 du chapitre 4 : Soit $\psi : Form \rightarrow N$ définie par récurrence :

- $\psi(x) = 2$ si $x \in V$
- $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2\psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- $\psi(\neg p) = \psi(p)$

Alors pour toute formule $p \in Form$: Si p se transforme en q par une application d'une des règles 1 à 4 alors $\psi(p) > \psi(q)$.

$$X \wedge (Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (1)$$

$$(X \vee Y) \wedge Z \rightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad (2)$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z) \quad (3)$$

$$(X \vee Y) \vee Z \rightarrow X \vee (Y \vee Z) \quad (4)$$

Correction : Tout d'abord on doit prouver par induction que

$$\psi(p) \geq 1 \text{ pour toute formule } p. \quad (5)$$

- Si $p \in V$ alors $\psi(p) = 2 > 1$.
- Si $p = \neg p_1$ alors $\psi(p) = \psi(p_1)$. Par l'hypothèse d'induction, $\psi(p_1) > 1$ et donc, $\psi(p) > 1$.
- Si $p = (p_1 \wedge p_2)$ alors $\psi(p) = \psi(p_1)^2 * \psi(p_2)$. Par l'hypothèse d'induction, $\psi(p_1) > 1$ et $\psi(p_2) > 1$.
Donc, $\psi(p) > 1$.
- Le cas $p = (p_1 \vee p_2)$ est analogue au cas précédent.

On continue par une induction sur p . Pour un p donné il faut montrer que si p se transforme en q par une application d'une règle alors $\psi(p) > \psi(q)$. En particulier si aucune règle de transformation s'applique à p alors il n'y a rien à montrer. Il ne faut pas oublier que dans le cas général il y a plusieurs possibilités pour appliquer une règle : il faut prendre en considération toutes ces possibilités.

- Si $p \in V$ alors aucune transformation n'est possible et il n'y a rien à montrer.
- Si $p = \neg p_1$, la transformation se fait en p_1 . Il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de p . On a donc que p_1 se transforme en q_1 , et $p = \neg p_1$ se transforme par conséquent en $q = \neg q_1$.

On obtient

$$\begin{aligned} & \psi(\neg p_1) \\ &= \psi(p_1) \quad \text{par définition de } \psi \\ &> \psi(q_1) \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &= \psi(q) \quad \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

- Si $p = (p_1 \wedge p_2)$ alors ils peuvent exister plusieurs possibilités pour appliquer une règle, cela dépend de p_1 et de p_2 :

1. Si $p_2 = (p_3 \vee p_4)$ alors la transformation peut se faire sur p . On a donc que p se transforme en $q = (p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_4)$. On obtient

$$\begin{aligned} & \psi((p_1 \wedge (p_3 \vee p_4))) \\ &= \psi(p_1)^2 * \psi((p_3 \vee p_4)) && \text{par définition de } \psi \\ &= \psi(p_1)^2 * (2\psi(p_3) + \psi(p_4) + 1) && \text{par définition de } \psi \\ &= 2\psi(p_1)^2 * \psi(p_3) + \psi(p_1)^2 * \psi(p_4) + \psi(p_1)^2 \\ &> 2\psi(p_1)^2 * \psi(p_3) + \psi(p_1)^2 * \psi(p_4) + 1 && \text{par la propriété (5)} \\ &= 2\psi((p_1 \wedge p_3)) + \psi((p_1 \wedge p_4)) + 1 && \text{par définition de } \psi \\ &= \psi(q) && \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

2. Si $p_1 = (p_3 \vee p_4)$ alors la transformation peut se faire sur p . On a donc que p se transforme en $q = (p_3 \wedge p_2) \vee (p_4 \wedge p_2)$. Ce cas est analogue au cas précédent.

3. Si $p_1 = (p_3 \wedge p_4)$ alors la transformation peut se faire sur p . On a donc que p se transforme en $q = p_3 \wedge (p_4 \wedge p_2)$. On obtient

$$\begin{aligned} & \psi(((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)) \\ = & \psi((p_3 \wedge p_4)^2 * \psi(p_2)) && \text{par définition de } \psi \\ = & \psi(p_3^4 * \psi(p_4)^2 * \psi(p_2)) && \text{par définition de } \psi \\ > & \psi(p_3)^2 * \psi(p_4)^2 * \psi(p_2) && \text{par la propriété (5)} \\ = & \psi(p_3)^2 * \psi((p_4 \wedge p_2)) && \text{par définition de } \psi \\ = & \psi(q) && \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

4. Si la transformation se fait sur p_1 avec le résultat q_1 , on a que p se transforme en $q = (q_1 \wedge p_2)$:

$$\begin{aligned} & \psi((p_1 \wedge p_2)) \\ = & \psi(p_1)^2 * \psi(p_2) && \text{par définition de } \psi \\ > & \psi(q_1)^2 * \psi(p_2) && \text{par hypothèse d'induction} \\ = & \psi(q) && \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

5. Le cas d'une transformation sur p_2 est analogue au cas précédent.

– Si $p = (p_1 \vee p_2)$ alors il y a aussi plusieurs cas :

1. Si $p_1 = (p_3 \vee p_4)$ alors la transformation peut se faire sur p . On a donc que p se transforme en $q = p_3 \vee (p_4 \vee p_2)$. On obtient

$$\begin{aligned} & \psi(((p_3 \vee p_4) \vee p_2)) \\ = & 2\psi((p_3 \vee p_4)) + \psi(p_2) + 1 && \text{par définition de } \psi \\ = & 4\psi(p_3) + 2\psi(p_4) + 2 + \psi(p_2) + 1 && \text{par définition de } \psi \\ > & 2\psi(p_3) + 2\psi(p_4) + \psi(p_2) + 1 + 1 && \text{par la propriété (5)} \\ = & 2\psi(p_3) + \psi((p_4 \vee p_2)) + 1 && \text{par définition de } \psi \\ = & \psi(q) && \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

2. Si la transformation se fait sur p_1 avec le résultat q_1 , on a que p se transforme en $q = (q_1 \vee p_2)$:

$$\begin{aligned} & \psi((p_1 \vee p_2)) \\ = & 2\psi(p_1) + \psi(p_2) + 1 && \text{par définition de } \psi \\ > & 2\psi(q_1) + \psi(p_2) + 1 && \text{par hypothèse d'induction} \\ = & \psi(q) && \text{par définition de } \psi \end{aligned}$$

3. Le cas d'une transformation sur p_2 est analogue au cas précédent.

Exercice 2 Une clause de Horn est une clause (une disjonction de littéraux) qui contient au plus un littéral positif. Une formule de Horn est une formule en FNC dont les clauses sont des clauses de Horn.

1. Montrer que toute formule de Horn est équivalente à la conjonction éventuellement vide de clauses de Horn de la forme :

- (a) x
- (b) $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n$
- (c) $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee x_{n+1}$

où $n \geq 1$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On dit dans ce cas que la formule est réduite.

2. Montrez qu'une formule de Horn réduite et qui ne contient pas de clauses de la forme (a) ou qui ne contient pas de clause de la forme (b) est satisfaisable.

3. Donner une méthode efficace (temps polynomial par rapport à la taille de la formule) pour déterminer si une formule de Horn ϕ est satisfaisable.

Correction :

1. – D'après la définition donnée, une formule de Horn s'écrit sous la forme $D_i \wedge \dots \wedge D_n$, telle que pour tout i , D_i est une clause de Horn. Dans chacun des D_i grâce à l'associativité du \vee et à la loi d'idempotence, on peut éliminer les répétitions de littéraux.
 - Il faut d'autre part montrer que l'on peut éliminer les clauses telles que le littéral positif apparaît sous une forme négative. Ces clauses sont des tautologies et puisque pour toute formule ϕ , $(\phi \wedge 1) \leftrightarrow \phi$, on obtient une formule équivalente ϕ' en retirant ces clauses.
2. – Si ϕ ne comporte pas de formule de la forme (a), l'affectation qui associe 0 à chaque variable propositionnelle satisfait toujours au moins un littéral par clause.
 - S'il n'y a pas de clause (b), l'affectation qui associe 1 à toutes les variables satisfait la formule car il y a toujours au moins un littéral par clause qui de ce fait est satisfait.
3. On donne une procédure pour "simplifier" une formule de Horn, tout en préservant la satisfaisabilité.
 - On trouve une formule réduite ϕ' équivalente à la formule en utilisant la méthode décrite à la première question.
 - On considère chaque clause de la forme (a), c'est-à-dire une variable x . On retire cette clause et on retire aussi, de toutes les autres clauses, les occurrences négatives de x . La formule qu'on obtient est satisfaisable si et seulement si la formule de départ l'était.
 - Si, en faisant cela, une des clauses devient vide, la formule n'est pas satisfaisable. Si non, quand on a retiré toutes les clauses de la forme (a), on a une formule de Horn qui contient seulement des clauses de la forme (b) et (c). Pour le point (2) ci dessus, la formule est satisfaisable.
 Pour la complexité, cela dépend de la définition de la taille, mais on peut donner une borne large en $O(n^2)$ pour $n =$ le nombre de littéraux.

Exercice 3 [Algorithme DPLL] Appliquer l'algorithme DPLL sur la formule suivante :

$$f = \begin{array}{l} (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg w) \\ \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg w) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (q \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg u) \end{array}$$

Correction : Dans f , on applique le cas (6) avec la variable w qui n'apparaît qu'avec une polarité négative, on supprime donc la troisième et la quatrième clause. On obtient :

$$f_{\bar{w}} = f[w/0] = \begin{array}{l} (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg w) \\ \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (q \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg u) \end{array}$$

Dans cette formule, on ne trouve pas des clauses unitaires, et toutes les variables apparaissent avec les deux polarités. On applique donc le cas (7) en choisissant la variable p . On traite donc les deux cas :

$p = 1$.

$$f_{\bar{w},p} = f_{\bar{w}}[p/1] = \begin{array}{l} (\neg q \vee r) \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (q \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg u) \end{array}$$

On ne peut appliquer que le cas (7). On choisit la variable q

$q = 1$.

$$f_{\bar{w},p,q} = f_{\bar{w},p}[q/1] = \begin{array}{l} r \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (\neg r \vee \neg u) \end{array}$$

$f_{\bar{w},p,q}$ contient une clause unitaire r donc on cherche :

$$f_{\bar{w},p,q,r} = f_{\bar{w},p,q}[r/1] = (u \vee x) \wedge (u \vee \neg x) \wedge \neg u$$

$f_{\bar{w},p,q,r}$ contient une clause unitaire $\neg u$ on cherche donc :

$$f_{\bar{w},p,q,r,\neg u} = f_{\bar{w},p,q,r}[u/0] = x \wedge \neg x$$

Application de (3) donne une formule qui contient une clause vide, la formule n'est donc pas satisfaisable.

$q = 0$.

$$f_{\bar{w},p,\bar{q}} = f_{\bar{w},p}[q/0] = (u \vee x) \wedge (u \vee \neg x) \wedge \neg u \wedge (\neg r \vee \neg u)$$

$f_{\bar{w},p,\bar{q}}$ contient une clause unitaire $\neg u$ donc on cherche :

$$f_{\bar{w},p,\bar{q},\bar{u}} = f_{\bar{w},p,\bar{q}}[u/0] = x \wedge \neg x$$

Application de (3) donne une formule qui contient une clause vide, la formule n'est donc pas satisfaisable.

On n'a pas pu arriver à une réponse affirmative, on traite alors le deuxième cas :

$p = 0$.

$$\begin{aligned} f_{\bar{w},\bar{p}} = f_{\bar{w}}[p/0] = & (q \vee r) \quad \wedge \quad (\neg q \vee \neg r) \quad \% \wedge \quad (p \vee \neg w) \\ & \wedge \quad (u \vee x) \\ & \wedge \quad (u \vee \neg x) \quad \wedge \quad (q \vee \neg u) \quad \wedge \quad (\neg r \vee \neg u) \end{aligned}$$

On ne peut appliquer que le cas (7). On choisit la variable q

$q = 1$.

$$f_{\bar{w},\bar{p},q} = f_{\bar{w},\bar{p}}[q/1] = \neg r \wedge (u \vee x) \wedge (u \vee \neg x) \wedge (\neg r \vee \neg u)$$

Une clause unitaire $\neg r$ donc :

$$f_{\bar{w},\bar{p},q,\bar{r}} = f_{\bar{w},\bar{p},q}[r/0] = (u \vee x) \wedge (u \vee \neg x)$$

u une variable qui n'apparaît qu'avec une polarité positive, on cherche donc : $u = 1$ (cas (5))

$$f_{\bar{w},\bar{p},q,\bar{r},u} = f_{\bar{w},\bar{p},q,\bar{r}}[u/1] = true$$

La formule est donc satisfaisable.

Exercice 4 On considère la formule $E = ((y \wedge z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)))$ où x , y et z sont des variables propositionnelles.

1. Déterminer une formule logiquement équivalente à E , écrite sans autre symbole de connecteur que \rightarrow et \leftrightarrow (en particulier, pas de \neg).
2. Donner une FND de E , aussi réduite que possible.
3. Montrer que les formules $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ et $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$ sont logiquement équivalentes.

Correction :

1. On a en général que $(y \wedge z) \rightarrow p$ est équivalente à $(y \rightarrow (z \rightarrow p))$, et $(\neg y \vee z)$ est équivalente à $(y \rightarrow z)$. Donc, E est logiquement équivalente à $(y \rightarrow (z \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$
2. Une FND est $x \vee \neg y \vee \neg z$. Une façon de le voir est

$$\begin{aligned} & y \rightarrow (z \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))) \\ \equiv & \neg y \vee (z \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))) \\ \equiv & \neg y \vee \neg z \vee (x \leftrightarrow (y \rightarrow z)) \\ \equiv & \neg y \vee \neg z \vee (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)) \\ \equiv & \neg y \vee \neg z \vee (x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \wedge \neg(\neg y \vee z)) \\ \equiv & \neg y \vee \neg z \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \end{aligned}$$

ce qui est en DNF, mais pas aussi réduite que possible. On a que $\neg y \vee (x \wedge \neg y)$ est équivalente à $\neg y$, et que $\neg z \vee (x \wedge z)$ est équivalente à $\neg z \vee x$. On obtient donc

$$\neg y \vee \neg z \vee x \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)$$

On a aussi que $\neg z \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)$ est équivalente à $\neg z$, et on obtient la DNF suivante est évidemment minimale :

$$\neg y \vee \neg z \vee x$$

3. $(y \rightarrow (z \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ est logiquement équivalente à $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$. Et c'est clair en prenant la FND de E trouvée dans 1 qu'elle est à son tour équivalente à $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$.