

Résolution

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

Quelques équivalences logiques (rappel)

$$\forall x. A \quad \equiv \quad \neg \exists x. \neg A$$

$$\neg \forall x. A \quad \equiv \quad \exists x. \neg A$$

$$\exists x. A \quad \equiv \quad \neg \forall x. \neg A$$

$$\neg \exists x. A \quad \equiv \quad \forall x. \neg A$$

$$\forall x. (A \wedge B) \quad \equiv \quad \forall x. A \wedge \forall x. B$$

$$\exists x. (A \vee B) \quad \equiv \quad \exists x. A \vee \exists x. B$$

$$\exists x. (A \rightarrow B) \quad \equiv \quad \forall x. A \rightarrow \exists x. B$$

$$\forall x. \forall y. A \quad \equiv \quad \forall y. \forall x. A$$

$$\exists x. \exists y. A \quad \equiv \quad \exists y. \exists x. A$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\forall x. A \quad \equiv \quad \exists x. A \quad \equiv \quad A$$

$$\forall x. (A \wedge B) \quad \equiv \quad A \wedge \forall x. B$$

$$\exists x. (A \wedge B) \quad \equiv \quad A \wedge \exists x. B$$

$$\forall x. (A \vee B) \quad \equiv \quad A \vee \forall x. B$$

$$\exists x. (A \vee B) \quad \equiv \quad A \vee \exists x. B$$

$$\exists x. (A \rightarrow B) \quad \equiv \quad A \rightarrow \exists x. B$$

$$\forall x. (A \rightarrow B) \quad \equiv \quad A \rightarrow \forall x. B$$

$$\exists x. (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad \forall x. B \rightarrow A$$

$$\forall x. (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad \exists x. B \rightarrow A$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en **forme prénexe** ssi elle est de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_n A$, où chaque Q_i est un quantificateur \forall ou \exists et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une forme G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i} A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n -aire. La formule $\forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i} A\{x_{n+1}/f(x_1, \dots, x_n)\}$ est la **skolemisation partielle** de G .

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Forme de Skolem

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs \exists . La **forme de Skolem** de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la forme de Skolem de la formule G . Alors

- Si G contient n quantificateurs \exists , G' contient n nouveaux symboles de fonction
- G' ne contient pas de quantificateurs \exists .
- G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Forme clausale

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme $r(t_1, \dots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \dots, t_n)$.
- Une **clause** est une formule de la forme $L_1 \vee \dots \vee L_q$ où chaque L_i est un littéral. La **clause vide** s'écrit \perp .

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses \mathcal{C}_G t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- G est satisfaisable ssi \mathcal{C}_G est satisfaisable.

Résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \dots, s_n) \quad C \vee \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \quad (\text{coupure})$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \quad (\textit{factorisation})$$

où

- $L = r(s_1, \dots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \dots, s_n)$) et
 $L' = r(t_1, \dots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \dots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \dots, s_n)$ et $r(t_1, \dots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \dots, s_n) \quad \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R F$ si F est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si \perp est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution.

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R F$, alors $\Delta \models F$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est **complète**, i.e., si $\Delta \models F$, alors $\Delta \vdash_R F$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.

Vers la complétude de la résolution

Soit Σ une signature contenant au moins une constante.

Définition :

- L'**univers d'Herbrand** de Σ est l'ensemble de termes clos sur Σ .
- La **base d'Herbrand** est l'ensemble d'atomes clos sur Σ .
- Une **interprétation de Herbrand** de Σ est une interprétation t.q.
 - Son domaine est l'univers d'Herbrand
 - Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n ,
$$\mathcal{I}(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

Conséquence : Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n , on peut identifier $\mathcal{I}(p)$ à un sous-ensemble \mathcal{S}_p de la base de Herbrand t.q.
 $\mathcal{I}(p)(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}_p$.

Lemmes pour le Théorème de Herbrand

Lemme : Soient x_1, \dots, x_n les variables libres d'un terme t . Soit \mathcal{I} une interprétation et σ une valuation dans \mathcal{I} . Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \dots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[t]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\dots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Lemme : Soient x_1, \dots, x_n les variables libres d'une formule G . Soit \mathcal{I} une interprétation et σ une valuation dans \mathcal{I} . Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \dots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\dots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Exercice : Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1/a, x_2/s(a)\}$. Soit $\mathcal{I}(r)(n, m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $\mathcal{I}(a) = 0$ et $\mathcal{I}(s)(n) = n + 1$. Vérifier le résultat précédent.

Théorème de Herbrand

Théorème : Un ensemble de clauses \mathcal{C} est satisfaisable ssi il existe une interprétation \mathcal{I} de Herbrand t.q. \mathcal{I} satisfait \mathcal{C} .

Arbres sémantiques complets

Définition : Soit B_0, B_1, B_2, \dots une énumération de tous les atomes clos d'une signature Σ . L'**arbre sémantique complet** associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

- la racine est B_0
- chaque nœud B_i possède un arc gauche **V** et un arc droite **F**
- tous les successeurs de B_i sont étiquetés par B_{i+1}

Exercice :

1. Construire un arbre sémantique complet A_1 pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construire un arbre sémantique complet A_2 pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \dots$

Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit \mathcal{C} un ensemble de clauses. Un nœud n de A est dit **nœud d'échec pour \mathcal{C}** ssi le segment de la branche qui va de la racine de A jusqu'à n suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de \mathcal{C} et si aucun prédécesseur de n n'est un nœud d'échec de A .

Exercice : Identifier dans les arbres A_1 et A_2 au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \vee q(x), q(a), r(a)\}$.

Exercice : Si $\perp \in \mathcal{C}$, qu'est-ce qu'on peut dire par rapport aux nœuds d'échec pour \mathcal{C} ?

Arbres sémantiques partiels

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit \mathcal{C} un ensemble de clauses. Un **arbre sémantique partielle** associé à \mathcal{C} est un arbre obtenu à partir de A en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

Définition : Un arbre sémantique partielle A est **clos** s'il est fini et si toute feuille de A est un nœud d'échec.

Exercice : Construire un arbre sémantique partielle clos associé à $\mathcal{C} = \{\neg r(x) \vee q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.

Corollaire du théorème de Herbrand

Théorème : Soit \mathcal{C} un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait \mathcal{C} ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à \mathcal{C} qui est clos.

Corollaire : Un ensemble de clauses \mathcal{C} est insatisfaisable ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à \mathcal{C} qui est clos.

Complétude de la résolution

Lemme : Soient C_1 et C_2 deux clauses. Soient C'_1 et C'_2 deux instances de C_1 et C_2 respectivement. Soit C'_{res} la clause obtenue par application d'un pas de résolution (coupure ou factorisation) à C'_1 et C'_2 . Alors il existe une clause C_{res} t.q.

- C'_{res} est une instance de C_{res}
- C_{res} est obtenue par résolution à partir de C_1 et C_2 .

Théorème : La résolution est **complète**, i.e., si $\Delta \models G$, alors $\Delta \vdash_R G$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.