Groupoïdes quantiques et logiques tensorielles

une introduction

Paul-André Melliès

Cours de l'Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques

Paris, Juin 2008

Deux annonces

Mardi 17 Juin à 11h : en salle 6C01, au groupe de travail sémantique de PPS,

Dominique Duval (Grenoble)

Logiques diagrammatiques et effets de bord

mots clefs: effets de bord, langages de programmation, monades fortes, construction de Kleisli, esquisses.

Vendredi 20 Juin à 14h : en salle 1C01, séance de questions autour du cours.

Plan de la séance

1 – Catégories et 2-catégories,

2 – Adjonctions,

3 – Diagrammes de cordes.

Première partie

Catégories et 2-catégories

Foncteurs et transformations naturelles

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de **morphismes** pour tout couple d'objets (A, B),

— d'une **loi de composition** $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D) \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B) \qquad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Foncteurs

Un **foncteur** F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée:

— d'un objet FA de $\mathcal{D}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \qquad = \qquad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \qquad = \qquad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ définit une catégorie dont les objets sont les éléments de X, et dans laquelle:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \{*\} & \text{si } x \leq y \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, il existe au plus un morphisme entre deux objets.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

Un monoïde $(M, \cdot, e)$ est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

Associativité	$\forall x, y, z \in M,$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Unité	$\forall x \in M,$	$x \cdot e = x = e \cdot x.$

Un homomorphisme f de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ est une fonction $f : M \longrightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exercice. Identifier tout monoïde $(M, \cdot, e)$ à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Transformations

Une **transformation**

$$\theta \quad : \quad F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$$

entre deux foncteurs

$$F, G \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est une famille de morphismes

$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in Obj(\mathcal{A})}$$

de la catégorie $\mathcal{B}$ indexée par les objets de la catégorie $\mathcal{A}$.

Composition verticale de transformations

Les transformations se composent verticalement

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \theta_1 * \theta_2"] & & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, "G" description] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow \theta_2"] & & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

et définissent ainsi une catégorie

$$\mathbf{Trans}\ (\ \mathcal{A}\ \ ,\ \ \mathcal{B}\ )$$

pour toutes catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Action à gauche sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

on définit l'**action à gauche** du foncteur H sur la transformation

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}$$

comme la transformation

$$H \circ_L \theta \quad : \quad H \circ F \quad \longrightarrow \quad H \circ G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$H \circ F(A) \xrightarrow{\quad H(\theta_A) \quad} H \circ G(A).$$

Propriétés de l'action à gauche (1)

Les deux équations

$$H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) \quad = \quad (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1) \qquad\qquad H \circ_L 1_F \quad = \quad 1_{H \circ F}$$

signifient diagrammatiquement que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow \theta_2"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \theta_2"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "H \circ F"] \arrow[r, bend right=50, "H \circ F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{H \circ F}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Propriétés de l'action à gauche (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} H \circ_L - & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta & \mapsto & H \circ_L \theta \end{array}}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$(H_1 \circ H_2) \circ_L F \quad = \quad H_1 \circ_L (H_2 \circ_L F) \qquad\qquad 1_{\mathcal{A}} \circ_L F \quad = \quad F$$

expriment le fait que $\circ_L$ définit une action.

Action à droite sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

le foncteur H agit sur la transformation

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{B} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

et la transporte en la transformation:

$$H \circ_R \theta \quad : \quad F \circ H \quad \longrightarrow \quad G \circ H \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$F \circ H(A) \xrightarrow{\theta_{H(A)}} G \circ H(A).$$

Propriétés de l'action à droite (1)

Les deux équations

$$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R H \quad = \quad (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 *_R H) \qquad\qquad 1_F \circ_R H \quad = \quad 1_{F \circ H}$$

signifient diagrammatiquement que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""'{name=D}] & \mathcal{C}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, no head] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{B} \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=60, ""'{name=D}] & \mathcal{C}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[from=M2, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F \circ H"] \arrow[r, bend right=50, "F \circ H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{F \circ H}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Propriétés de l'action à droite (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} - \circ_R H & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta & \mapsto & \theta \circ_R H \end{array}}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$\theta \circ_R (H_2 \circ H_1) \quad = \quad (\theta \circ_R H_2) \circ_R H_1 \qquad\qquad F \circ_R 1_{\mathcal{B}} \quad = \quad F$$

expriment le fait que $\circ_R$ définit une action.

Compatibilité des actions à gauche et à droite

Dernière équation: dans la situation

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "H_1"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

l'ordre dans lequel on fait agir H_1 et H_2 sur la transformation θ ne compte pas:

$$(H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1 \quad = \quad H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1)$$

Sesqui-catégories

Une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$ est une catégorie munie d'une structure de catégorie

$$\mathscr{D}(A,B)$$

pour toute paire d'objets (A,B) de la catégorie, telle que

$$\text{les objets de } \mathscr{D}(A,B) \quad = \quad \text{les morphismes de } A \text{ dans } B$$

munie d'une paire d'actions $\circ_L$ et $\circ_R$ satisfaisant les neuf équations évoquées:

$$\begin{array}{rclrcl}
h \circ_L (\theta_2 * \theta_1) & = & (h \circ_L \theta_2) * (h \circ_L \theta_1) & h \circ_L 1_f & = & 1_{h \circ f} \\
(h_1 \circ h_2) \circ_L f & = & h_1 \circ_L (h_2 \circ_L f) & 1_A \circ_L f & = & f \\
(\theta_2 * \theta_1) \circ_R h & = & (\theta_2 \circ_R h) * (\theta_1 *_R h) & 1_f \circ_R h & = & 1_{f \circ h} \\
\theta \circ_R (h_2 \circ h_1) & = & (\theta \circ_R h_2) \circ_R h_1 & f \circ_R 1_B & = & f
\end{array}$$

$$(\, h_2 \circ_L \theta \,) \circ_R h_1 \quad = \quad h_2 \circ_L (\, \theta \circ_R h_1 \,)$$

Les catégories, foncteurs et transformations forment une sesqui-catégorie.

La sesqui-catégorie des catégories et transformations

Soit deux transformations θ_1 et θ_2 dans la configuration suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

La transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{A} \arrow[r, bend right, "G_1"'] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

diffère en général de la transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{A} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend right, "G_2"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Transformations naturelles

Une transformation

$$\theta \quad : \quad F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est **naturelle** lorsque le diagramme

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"] & GB \end{tikzcd}$$

commute pour tout morphisme

$$A \xrightarrow{f} B$$

On note $\mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des foncteurs et transformations naturelles

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}$$

Loi d'échange

On dit qu'une paire de 2-cellules θ_1 et θ_2 dans une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
$$

satisfait la loi d'échange lorsque l'égalité

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend right, "G_1"'] & B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend right, "G_2"'] & C
\end{tikzcd}
$$

est satisfaite.

Autrement dit, l'ordre dans lequel on compose θ_1 et θ_2 est sans importance.

Exercice

Dans une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$, on appelle **centrale à gauche** toute 2-cellule θ_2 telle que la loi d'échange

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\ A \arrow[r, bend right, "g_1"'] & B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\ A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend right, "g_2"'] & C \end{tikzcd}$$

est satisfaite pour toute transformation θ_1.

Montrer que les transformations naturelles coïncident avec les 2-cellules centrales à gauche, dans la sesqui-catégorie des catégories, foncteurs et transformations.

En déduire l'existence d'un foncteur:

$$\mathbf{Nat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

2-catégories

Une 2-catégorie $\mathscr{D}$ est une sesqui-catégorie telle que **la loi d'échange** est satisfaite par toute paire de 2-cellules

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
$$

2-catégories (définition alternative)

Une catégorie $\mathscr{D}$ est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'une catégorie $\mathscr{D}(A,B)$ pour tout couple d'objets (A,B),

— d'un **foncteur** de composition $\circ : \mathscr{D}(B,C) \times \mathscr{D}(A,B) \longrightarrow \mathscr{D}(A,C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathscr{D}(A,A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f,g,h) \in \mathscr{D}(A,B) \times \mathbf{Hom}(B,C) \times \mathscr{D}(C,D) \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathscr{D}(A,B) \qquad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit

$$\theta \quad : \quad f \quad \longrightarrow \quad g \quad : \quad A \longrightarrow B$$

quand

$$\theta \quad : \quad f \longrightarrow g$$

est un morphisme de la catégorie $\mathscr{D}(A,B)$.

Loi d'échange de Godement

Dans une 2-catégorie $\mathscr{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, les deux manières canoniques de composer les 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, bend left=60, "f_1"] \arrow[rr, "g_1" description] \arrow[rr, bend right=60, "h_1"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\alpha_1"] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\beta_1"] & & \mathcal{B} \arrow[rr, bend left=60, "f_2"] \arrow[rr, "g_2" description] \arrow[rr, bend right=60, "h_2"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\alpha_2"] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\beta_2"] & & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

commutent:

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1) \quad = \quad (\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

Suspension

Toute catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}$ peut être vue comme la 2-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$

— qui ne contient qu'une seule 0-cellule,

— dont les 1-cellules sont les 0-cellules de $\mathcal{C}$

— dont les 2-cellules sont les 1-cellules de $\mathcal{C}$

avec les lois de composition induites.

Toute catégorie prémonoidale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ peut être vue comme une sesqui-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$ à un objet.

Exemple: la 2-catégorie des ensembles et des relations

La 2-catégorie $\mathscr{Rel}$ est définie comme suit:

– ses 0-cellules (ou objets) sont les ensembles,

– ses 1-cellules (ou morphismes) sont les relations entre ensemble,

$$A \xrightarrow{f \cdot g} B \quad = \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

composées relationnellement:

$$a\,[f \cdot g]\,c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists b \in B, \qquad a\,[f]\,b \quad \text{et} \quad b\,[g]\,c.$$

– ses 2-cellules (ou cellules) sont données par inclusion:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \end{tikzcd} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \subseteq g$$

En particulier, les catégories $\mathscr{Rel}(A, B)$ sont des catégories de préordre.

Deuxième partie

Adjonctions et monades

Adjonction

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories.

Une **adjonction** est un triplet (L, R, ϕ) où L et R sont deux foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad\qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets A dans $\mathcal{A}$ et B dans $\mathcal{B}$,

$$\phi_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \;\cong\; \mathcal{A}(A, RB)$$

naturelle en A et B. On écrit aussi:

$$\frac{LA \longrightarrow_{\mathcal{B}} B}{A \longrightarrow_{\mathcal{A}} RB} \quad \phi_{A,B}$$

Dans ce cas, on dit que L **est adjoint à gauche de** R, et on écrit $L \dashv R$.

La version 2-dimensionnelle d'isomorphisme.

La bijection ϕ est naturelle signifie ici...

Naturelle en A et B signifie que la famille de bijections $\phi_{A,B}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
LA \arrow[r, "g"] & B \arrow[d, "h_B"] \\
LA' \arrow[u, "Lh_A"] \arrow[r, "f"'] & RB'
\end{tikzcd}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_{A,B}(g)"] & RB \arrow[d, "Rh_B"] \\
A' \arrow[u, "h_A"] \arrow[r, "\phi_{A',B'}(f)"'] & RB'
\end{tikzcd}$$

Exemple: espace vectoriel libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Vect} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$	:	la catégorie des ensembles et fonctions,
$\mathcal{B} = \mathbf{Vect}$	:	la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k
R	:	le foncteur « d'oubli » $V \mapsto U(V)$
L	:	le foncteur « libre » $X \mapsto kX$

$$kX \quad := \quad \left\{ \quad \sum_{x \in X} \lambda_x \ x \quad \middle| \quad \lambda_x \in k \text{ presque partout nul.} \quad \right\}$$

Exemple: algèbre libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Alg} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Vect}$	:	la catégorie des espaces vectoriels
$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$	:	la catégorie des algèbres et morphismes d'algèbres,
R	:	le foncteur « d'oubli » $A \mapsto U(A)$.
L	:	le foncteur « libre » $V \mapsto TV$.

$$TV := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

Définition d'une algèbre de Lie

Espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'un crochet de Lie

Anti-symétrie:

$$[x, y] \quad = \quad -[y, x]$$

Identité de Jacobi:

$$[x, [y, z]] \quad + \quad [y, [z, x]] \quad + \quad [z, [x, y]] \quad = \quad 0$$

Exemple: l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur une variété lisse.

Exemple: algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Lie} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Alg} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Lie}$	:	la catégorie des algèbres de Lie,
$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$	:	la catégorie des algèbres,
R	:	équipe A du crochet de Lie $[a, b] = ab - ba$,
L	:	le foncteur « algèbre enveloppante » $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$.

$$U(\mathfrak{g}) \quad := \quad T\mathfrak{g} \quad / \quad I(\mathfrak{g})$$

où $I(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère engendré par $ab - ba - [a, b]$.

Exemple: catégorie libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Graph} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Cat} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Graph}$	:	la catégorie des graphes,
$\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$	:	la catégorie des catégories et foncteurs,
R	:	le foncteur « d'oubli »,
L	:	le foncteur « libre ».

Exemple : objet terminal

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbb{1} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathbb{1}$	:	la catégorie singleton,
R	:	le foncteur dont l'image est l'objet terminal 1,
L	:	le foncteur canonique (et unique).

Exemple : catégorie cartésienne

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$	:	le produit cartésien de $\mathcal{C}$ avec elle-même,
R	:	le foncteur produit cartésien $(A, B) \mapsto A \times B$,
L	:	le foncteur diagonal $A \mapsto (A, A)$.

Rappel: produit cartésien

Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie $\mathcal{C}$, est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] \arrow[r, "h"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Exercice. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près.

Exemple : catégorie avec limites

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$	:	la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ des transformations naturelles de la catégorie d'indice $\mathcal{J}$ dans la catégorie $\mathcal{C}$,
R	:	le foncteur limite $F \mapsto \mathbf{lim}_{j\in\mathcal{J}} F(j)$,
L	:	le foncteur diagonal $A \mapsto (j \mapsto A)$.

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "{[A]}"] \arrow[dr, bend right, "{[B]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
 & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\qquad \overset{\phi_{A,B}}{\longmapsto} \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "{[A]}"] \arrow[dr, bend right, "{[B]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
 & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Ici, un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans la catégorie $\mathcal{C}$
vu comme une transformation naturelle $[X] \longrightarrow [Y]$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "{[X]}"] \arrow[r, bend right, "{[Y]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\ \mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "A"] \arrow[dr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad \overset{\phi_{A,B}}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{A} \\ \mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "A"] \arrow[dr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\ & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"'] \end{tikzcd}$$

Ici, un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans la catégorie $\mathcal{C}$
vu comme une transformation naturelle $X \longrightarrow Y$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:

La bijection ϕ est naturelle en les transformations naturelles α et β.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left=50, "A'"] \arrow[drr, bend right=50, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbb{1} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & {} \\
 & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \xmapsto{\phi_{A',B'}} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \\
\mathbb{1} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left=50, "A'"] \arrow[drr, bend right=50, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbb{1} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & {} \\
 & & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}$$

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Ce point de vue 2-catégorique débouche sur une définition plus satisfaisante d'adjonction:

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\ \mathcal{C} \arrow[urr, bend left, "A"] \arrow[drr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & {} & \\ & & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad \overset{\phi_{A,B}}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & & \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \arrow[urr, bend left, "A"] \arrow[drr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & {} & \\ & & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"'] \end{tikzcd}$$

Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:

La bijection ϕ est naturelle en les transformations naturelles α et β.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left=50, "A'"] \arrow[drr, bend right=50, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & {} \\
 & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \overset{\phi_{A',B'}}{\longmapsto} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \\
\mathcal{D} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left=50, "A'"] \arrow[drr, bend right=50, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & {} \\
 & & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Présentation algébrique de l'adjonction

Une **adjonction** est un quadruplet $(L, R, \eta, \varepsilon)$ où L et R sont des foncteurs

$$L \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad\qquad R \quad : \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et η et ε des transformations naturelles:

$$\eta \quad : \quad Id_{\mathcal{A}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} RL \qquad\qquad \varepsilon \quad : \quad LR \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{B}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de L et R respectivement).

$$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R \qquad\qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon F} L$$

On dessine cette situation de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend left, "Id_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{B} \arrow[r, "R"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta", pos=0] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Définition duale (mais équivalente) d'adjonction

Par dualité, la donnée d'une bijection ψ entre les ensembles de 2-cellules

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dd, "L"'] \arrow[dr, bend left, "A"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, bend right, "B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \xmapsto{\psi_{A,B}} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dr, bend left, "A"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{B} \arrow[uu, "R"] \arrow[ur, bend right, "B"'] &
\end{tikzcd}
$$

bijection qu'on demande naturelle en A et B.

Exemple: adjonctions dans la 2-catégorie $\mathscr{Rel}$

On peut appliquer la notion d'adjonction dans toute 2-catégorie.

Ainsi, toute adjonction dans $\mathscr{Rel}$ est de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & B \arrow[l, bend left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

où

$$A \xrightarrow{f} B$$

est une fonction ensembliste, et

$$\begin{array}{ccccccc} f_* & = & \{ & (a,b) & \mid & a = f(b) & \} \\ f^* & = & \{ & (b,a) & \mid & b = f(a) & \} \end{array}$$

De plus,

l'unité η est inversible	ssi	f est injective.
la counité ε est inversible	ssi	f est surjective.

Troisième partie

Diagrammes de cordes

Une notation topologique

Exemples

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] \arrow[rr, bend left=80, "f"] \arrow[rr, bend right=80, "g"'] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=70, "f"] \arrow[r, "id" description] \arrow[r, bend right=70, "g"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \varepsilon"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] \arrow[rr, bend left=80, "f"] \arrow[rr, bend right=80, "g"'] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

Trois manières de dessiner la même cellule 2-dimensionnelle