

Groupoïdes quantiques et logiques tensorielles
une introduction

Paul-André Melliès

Cours de l'Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques

Paris, Juin 2008

Deux annonces

Mardi 17 Juin à 11h : en salle 6C01, au groupe de travail sémantique de PPS,

Dominique Duval (Grenoble)

Logiques diagrammatiques et effets de bord

**mots clefs: effets de bord, langages de programmation,
monades fortes, construction de Kleisli,
esquisses.**

Vendredi 20 Juin à 14h : en salle 1C01, séance de questions autour du cours.

Plan de la séance

- 1 – Catégories et 2-catégories,
- 2 – Adjonctions,
- 3 – Diagrammes de cordes.

Première partie

Catégories et 2-catégories

Foncteurs et transformations naturelles

Catégories

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de **morphismes** pour tout couple d'objets (A, B) ,

— d'une **loi de composition** $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A ,

1— tel que \circ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de \circ

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B) \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Foncteurs

Un **foncteur** F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} est la donnée:

— d'un objet FA de \mathcal{D} pour tout objet A de \mathcal{C} ,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de \mathcal{C} .

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \quad = \quad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \quad = \quad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Tout ensemble ordonné (X, \leq) définit une catégorie dont les objets sont les éléments de X , et dans laquelle:

$$\mathbf{Hom}_c(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, il existe au plus un morphisme entre deux objets.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

Un monoïde (M, \cdot, e) est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

$$\begin{array}{ll} \text{Associativité} & \forall x, y, z \in M, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ \text{Unité} & \forall x \in M, \quad x \cdot e = x = e \cdot x. \end{array}$$

Un homomorphisme f de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) est une fonction $f : M \rightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exercice. Identifier tout monoïde (M, \cdot, e) à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Transformations

Une **transformation**

$$\theta : F \longrightarrow G$$

entre deux foncteurs

$$F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

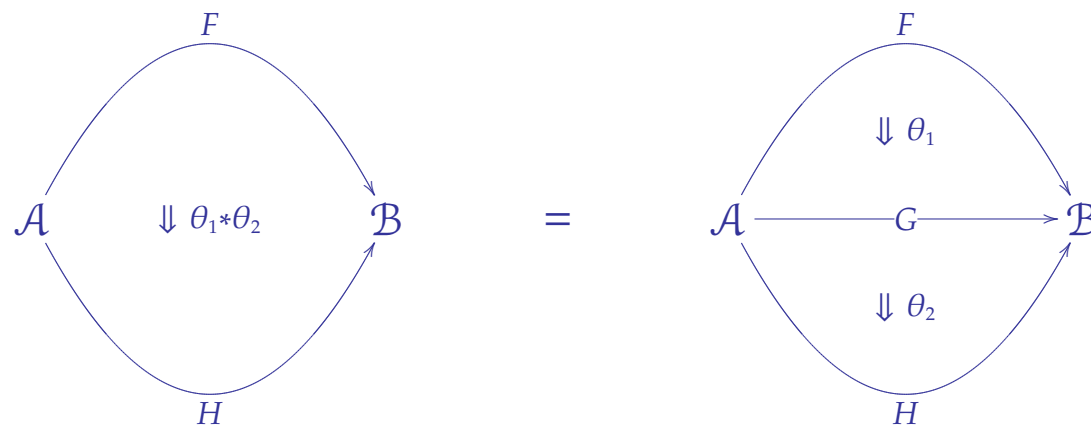
est une famille de morphismes

$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \text{Obj}(\mathcal{A})}$$

de la catégorie \mathcal{B} indexée par les objets de la catégorie \mathcal{A} .

Composition verticale de transformations

Les transformations se composent verticalement



et définissent ainsi une catégorie

Trans (\mathcal{A} , \mathcal{B})

pour toutes catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Action à gauche sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{A} & & & & \mathcal{B} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C} \\ & \searrow & \Downarrow \theta & \nearrow & \\ & & G & & \end{array}$$

on définit l'**action à gauche** du foncteur H sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

comme la transformation

$$H \circ_L \theta : H \circ F \longrightarrow H \circ G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

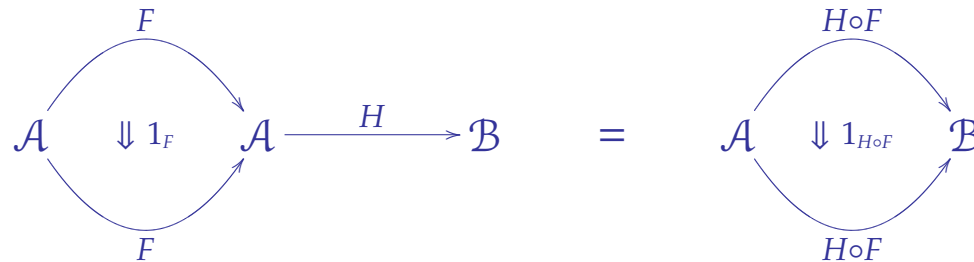
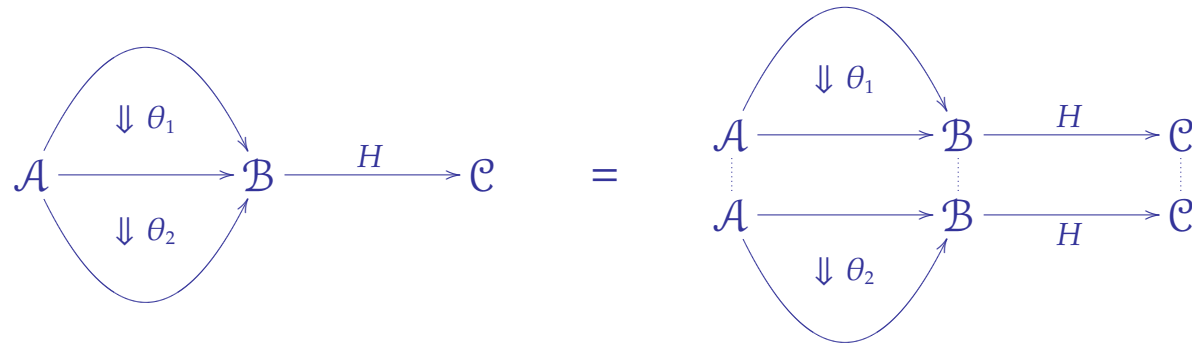
$$H \circ F(A) \xrightarrow{H(\theta_A)} H \circ G(A).$$

Propriétés de l'action à gauche (1)

Les deux équations

$$H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) = (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1) \qquad H \circ_L 1_F = 1_{H \circ F}$$

signifient diagrammatiquement que



Propriétés de l'action à gauche (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{ccc} H \circ_L - & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & \theta & \mapsto H \circ_L \theta \end{array}$$

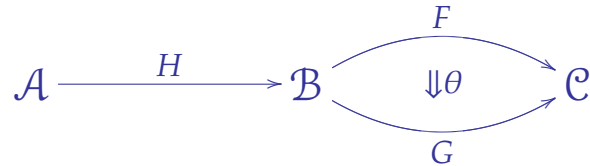
définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$(H_1 \circ H_2) \circ_L F = H_1 \circ_L (H_2 \circ_L F) \qquad 1_{\mathcal{A}} \circ_L F = F$$

expriment le fait que \circ_L définit une action.

Action à droite sur les transformations

Dans la situation suivante



le foncteur H agit sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et la transporte en la transformation:

$$H \circ_R \theta : F \circ H \longrightarrow G \circ H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$F \circ H(A) \xrightarrow{\theta_{H(A)}} G \circ H(A).$$

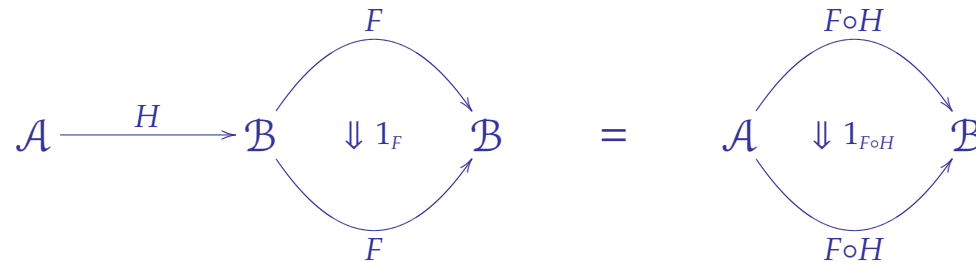
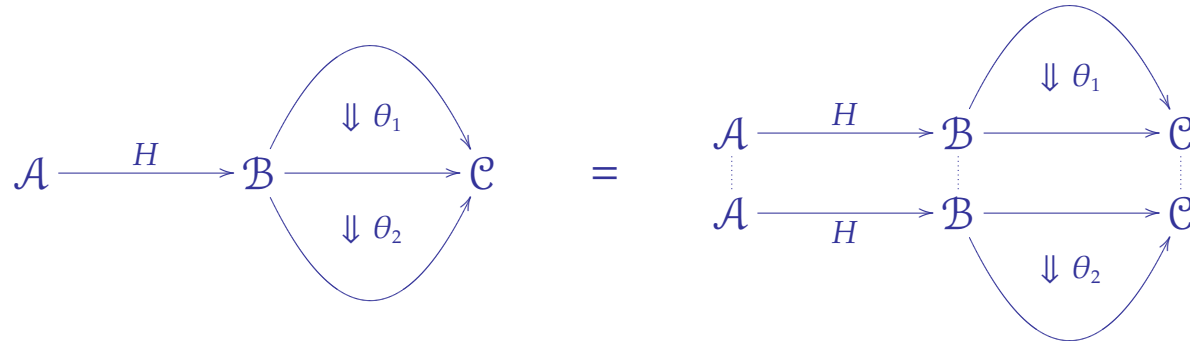
Propriétés de l'action à droite (1)

Les deux équations

$$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R H = (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 *_R H)$$

$$1_F \circ_R H = 1_{F \circ H}$$

signifient diagrammatiquement que



Propriétés de l'action à droite (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{lcl} - \circ_R H & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta \longmapsto \theta \circ_R H \end{array}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$\theta \circ_R (H_2 \circ H_1) = (\theta \circ_R H_2) \circ_R H_1 \qquad F \circ_R 1_{\mathcal{B}} = F$$

expriment le fait que \circ_R définit une action.

Compatibilité des actions à gauche et à droite

Dernière équation: dans la situation

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{H_1} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{H_2} \mathcal{B}'$$

l'ordre dans lequel on fait agir H_1 et H_2 sur la transformation θ ne compte pas:

$$(H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1 = H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1)$$

Sesqui-catégories

Une sesqui-catégorie \mathcal{D} est une catégorie munie d'une structure de catégorie

$$\mathcal{D}(A, B)$$

pour toute paire d'objets (A, B) de la catégorie, telle que

$$\text{les objets de } \mathcal{D}(A, B) = \text{les morphismes de } A \text{ dans } B$$

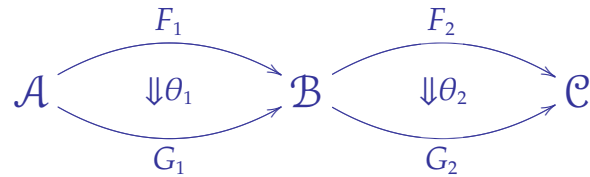
munie d'une paire d'actions \circ_L et \circ_R satisfaisant les neuf équations évoquées:

$h \circ_L (\theta_2 * \theta_1)$	$=$	$(h \circ_L \theta_2) * (h \circ_L \theta_1)$	$h \circ_L 1_f$	$=$	$1_{h \circ f}$
$(h_1 \circ h_2) \circ_L f$	$=$	$h_1 \circ_L (h_2 \circ_L f)$	$1_A \circ_L f$	$=$	f
$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R h$	$=$	$(\theta_2 \circ_R h) * (\theta_1 \circ_R h)$	$1_f \circ_R h$	$=$	$1_{f \circ h}$
$\theta \circ_R (h_2 \circ h_1)$	$=$	$(\theta \circ_R h_2) \circ_R h_1$	$f \circ_R 1_B$	$=$	f
	$(h_2 \circ_L \theta) \circ_R h_1$	$=$	$h_2 \circ_L (\theta \circ_R h_1)$		

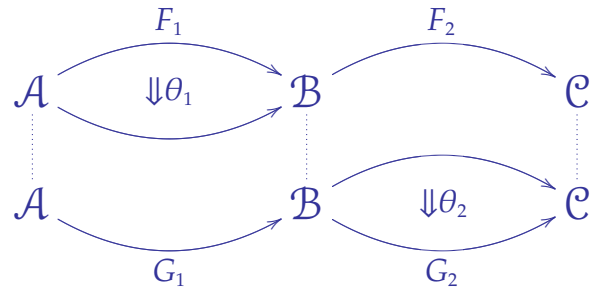
Les catégories, foncteurs et transformations forment une sesqui-catégorie.

La sesqui-catégorie des catégories et transformations

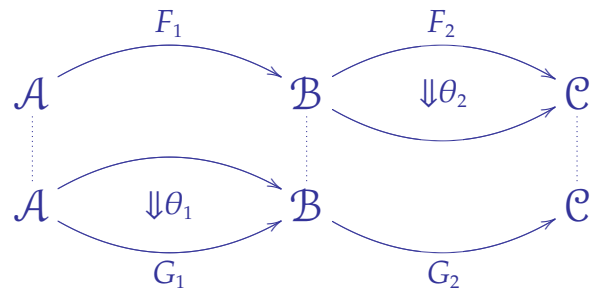
Soit deux transformations θ_1 et θ_2 dans la configuration suivante



La transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2



diffère en général de la transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2 .



Transformations naturelles

Une transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est **naturelle** lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\theta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\theta_B} & GB \end{array}$$

commute pour tout morphisme

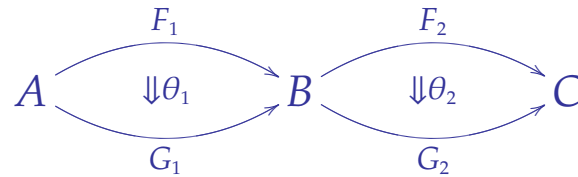
$$A \xrightarrow{f} B$$

On note $\mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des foncteurs et transformations naturelles

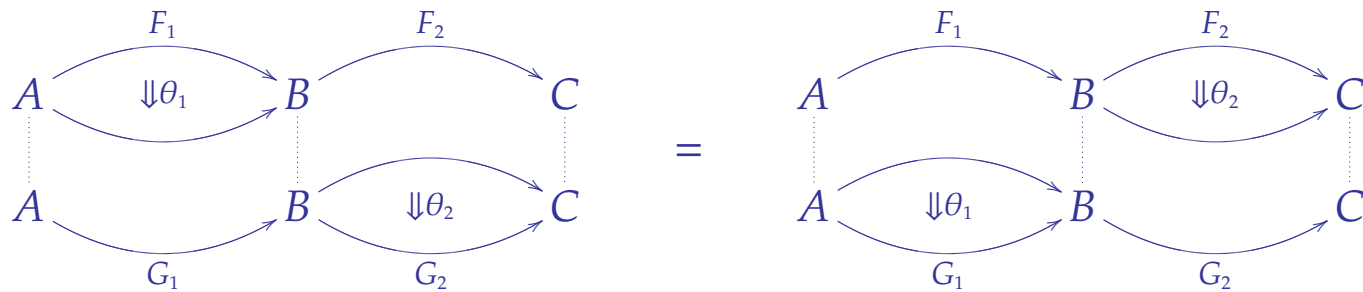
$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Loi d'échange

On dit qu'une paire de 2-cellules θ_1 et θ_2 dans une sesqui-catégorie \mathcal{D}



satisfait la loi d'échange lorsque l'égalité

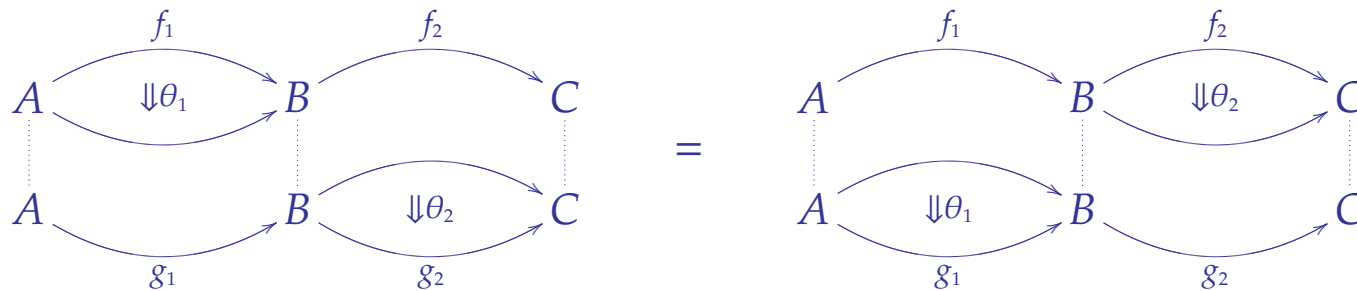


est satisfaite.

Autrement dit, l'ordre dans lequel on compose θ_1 et θ_2 est sans importance.

Exercice

Dans une sesqui-catégorie \mathcal{D} , on appelle **centrale à gauche** toute 2-cellule θ_2 telle que la loi d'échange



est satisfaite pour toute transformation θ_1 .

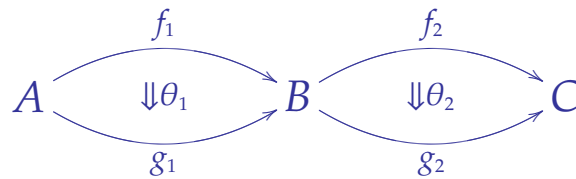
Montrer que les transformations naturelles coïncident avec les 2-cellules centrales à gauche, dans la sesqui-catégorie des catégories, foncteurs et transformations.

En déduire l'existence d'un foncteur:

$$\mathbf{Nat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

2-catégories

Une 2-catégorie \mathcal{D} est une sesqui-catégorie telle que **la loi d'échange** est satisfaite par toute paire de 2-cellules



2-catégories (définition alternative)

Une catégorie \mathcal{D} est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'une catégorie $\mathcal{D}(A, B)$ pour tout couple d'objets (A, B) ,

— d'un **foncteur** de composition $\circ : \mathcal{D}(B, C) \times \mathcal{D}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(A, C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathcal{D}(A, A)$ pour tout objet A ,

1— tel que \circ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{D}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathcal{D}(C, D) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de \circ

$$\forall f \in \mathcal{D}(A, B) \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit

$$\theta : f \longrightarrow g : A \longrightarrow B$$

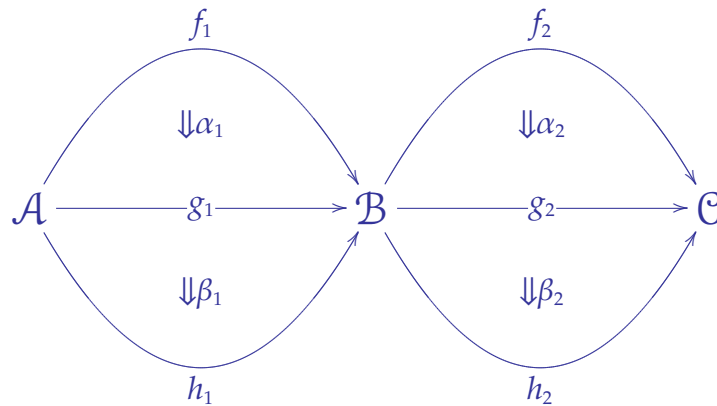
quand

$$\theta : f \longrightarrow g$$

est un morphisme de la catégorie $\mathcal{D}(A, B)$.

Loi d'échange de Godement

Dans une 2-catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, les deux manières canoniques de composer les 2-cellules



commutent:

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

Suspension

Toute catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} peut être vue comme la 2-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$

- qui ne contient qu'une seule 0-cellule,
- dont les 1-cellules sont les 0-cellules de \mathcal{C}
- dont les 2-cellules sont les 1-cellules de \mathcal{C}

avec les lois de composition induites.

Toute catégorie prémonoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ peut être vue comme une sesqui-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$ à un objet.

Exemple: la 2-catégorie des ensembles et des relations

La 2-catégorie \mathcal{Rel} est définie comme suit:

- ses 0-cellules (ou objets) sont les ensembles,
- ses 1-cellules (ou morphismes) sont les relations entre ensemble,

$$A \xrightarrow{f \cdot g} B = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

composées relationnellement:

$$a [f \cdot g] c \iff \exists b \in B, \quad a [f] b \text{ et } b [g] c.$$

- ses 2-cellules (ou cellules) sont données par inclusion:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & & B \\ & \Downarrow & \\ & \curvearrowleft & \\ & g & \end{array} \iff f \subseteq g$$

En particulier, les catégories $\mathcal{Rel}(A, B)$ sont des catégories de préordre.

Deuxième partie

Adjonctions et monades

Adjonction

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories.

Une **adjonction** est un triplet (L, R, ϕ) où L et R sont deux foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets A dans \mathcal{A} et B dans \mathcal{B} ,

$$\phi_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \cong \mathcal{A}(A, RB)$$

naturelle en A et B . On écrit aussi:

$$\frac{LA \longrightarrow_{\mathcal{B}} B}{A \longrightarrow_{\mathcal{A}} RB} \quad \phi_{A,B}$$

Dans ce cas, on dit que L est **adjoint à gauche de** R , et on écrit $L \dashv R$.

La version 2-dimensionnelle d'isomorphisme.

La bijection ϕ est naturelle signifie ici...

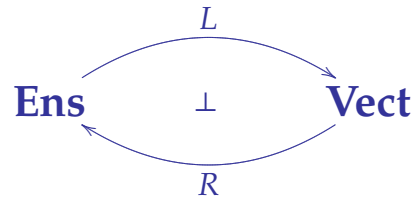
Naturelle en A et B signifie que la famille de bijections $\phi_{A,B}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{g} & B \\ \uparrow Lh_A & & \downarrow h_B \\ LA' & \xrightarrow{f} & RB' \end{array}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_{A,B}(g)} & RB \\ \uparrow h_A & & \downarrow Rh_B \\ A' & \xrightarrow{\phi_{A',B'}(f)} & RB' \end{array}$$

Exemple: espace vectoriel libre



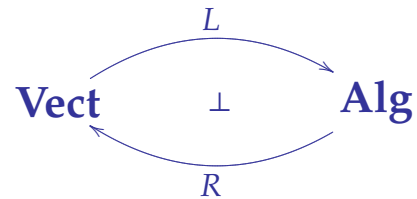
où

$\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$: la catégorie des ensembles et fonctions,
 $\mathcal{B} = \mathbf{Vect}$: la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k

R : le foncteur « d'oubli » $V \mapsto U(V)$
 L : le foncteur « libre » $X \mapsto kX$

$$kX := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in k \text{ presque partout nul.} \right\}$$

Exemple: algèbre libre



où

$\mathcal{A} = \mathbf{Vect}$: la catégorie des espaces vectoriels
 $\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$: la catégorie des algèbres et morphismes d'algèbres,

R : le foncteur « d'oubli » $A \mapsto U(A)$.
 L : le foncteur « libre » $V \mapsto TV$.

$$TV := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

Définition d'une algèbre de Lie

Espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'un crochet de Lie

Anti-symétrie:

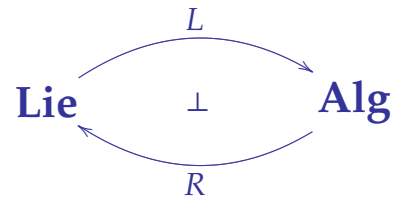
$$[x, y] = -[y, x]$$

Identité de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Exemple: l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur une variété lisse.

Exemple: algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie



où

$\mathcal{A} = \mathbf{Lie}$: la catégorie des algèbres de Lie,

$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$: la catégorie des algèbres,

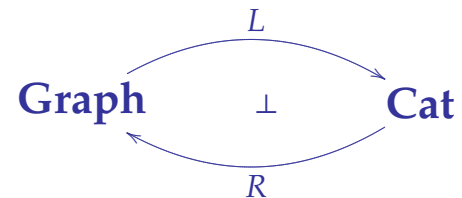
R : équivarient A du crochet de Lie $[a, b] = ab - ba$,

L : le foncteur « algèbre enveloppante » $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$.

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g} / I(\mathfrak{g})$$

où $I(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère engendré par $ab - ba - [a, b]$.

Exemple: catégorie libre

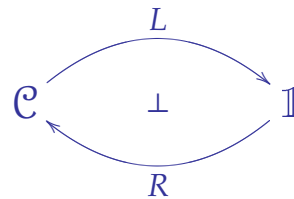


où

- $\mathcal{A} = \mathbf{Graph}$: la catégorie des graphes,
- $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$: la catégorie des catégories et foncteurs,

- R : le foncteur « d'oubli »,
- L : le foncteur « libre ».

Exemple : objet terminal



où

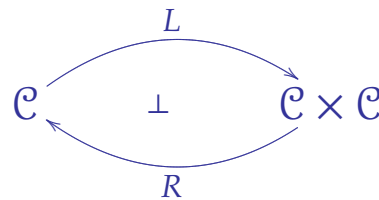
$\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal $\mathbb{1}$,

$\mathcal{B} = \mathbb{1}$: la catégorie singleton,

R : le foncteur dont l'image est l'objet terminal $\mathbb{1}$,

L : le foncteur canonique (et unique).

Exemple : catégorie cartésienne



où

- $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal 1 ,
- $\mathcal{B} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$: le produit cartésien de \mathcal{C} avec elle-même,

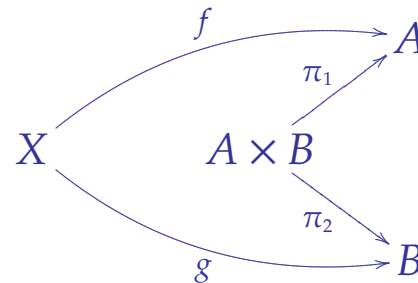
- R : le foncteur produit cartésien $(A, B) \mapsto A \times B$,
- L : le foncteur diagonal $A \mapsto (A, A)$.

Rappel: produit cartésien

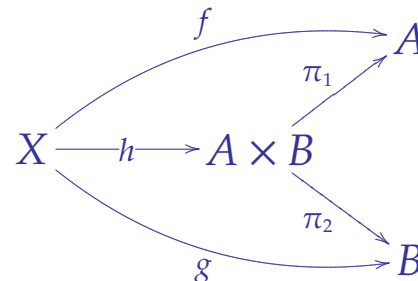
Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie \mathcal{C} , est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \quad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

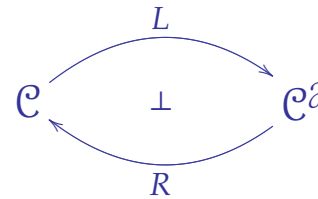


il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme



Exercice. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près.

Exemple : catégorie avec limites

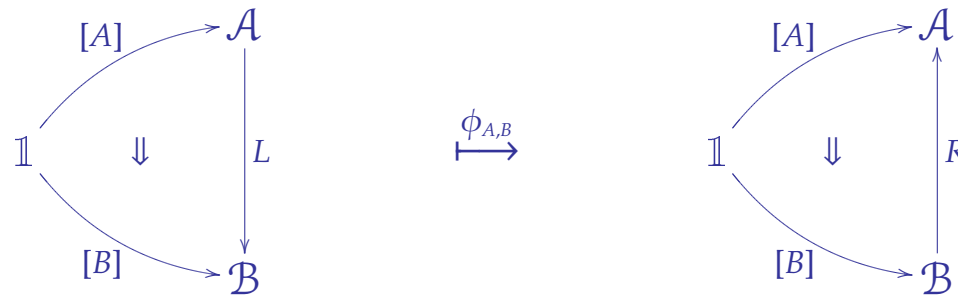


où

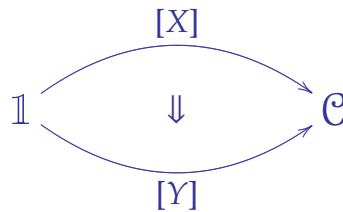
- $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal 1 ,
- $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$: la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ des transformations naturelles de la catégorie d'indice \mathcal{J} dans la catégorie \mathcal{C} ,
- R : le foncteur limite $F \mapsto \mathbf{lim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)$,
- L : le foncteur diagonal $A \mapsto (j \mapsto A)$.

Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

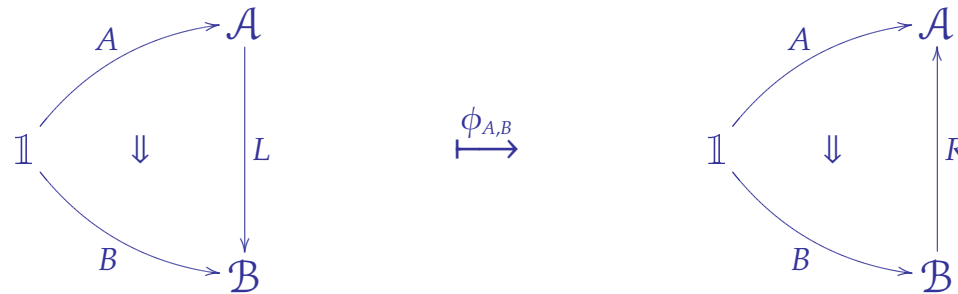


Ici, un morphisme $X \rightarrow Y$ dans la catégorie \mathcal{C} vu comme une transformation naturelle $[X] \rightarrow [Y]$.

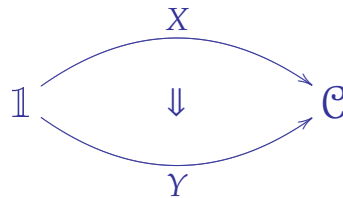


Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

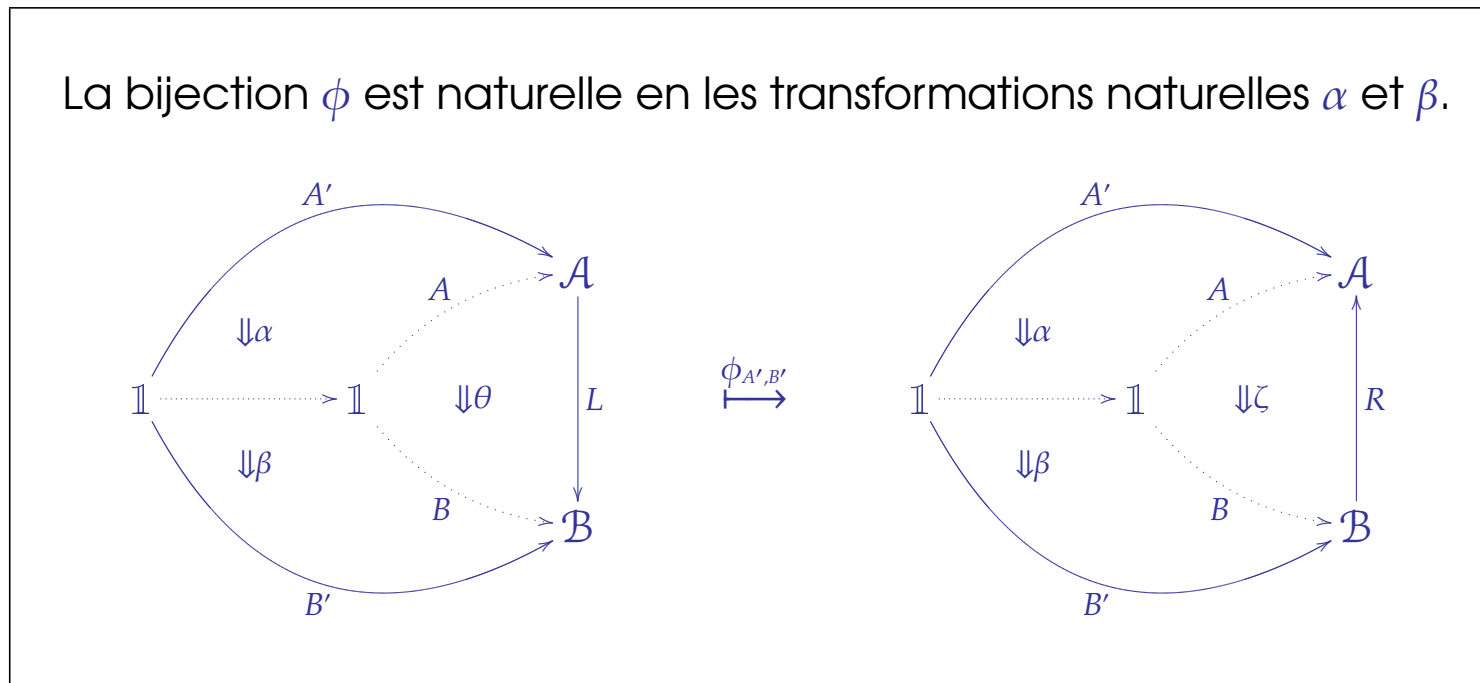


Ici, un morphisme $X \rightarrow Y$ dans la catégorie \mathcal{C}
vu comme une transformation naturelle $X \rightarrow Y$.



Condition de naturalité 2-dimensionnelle

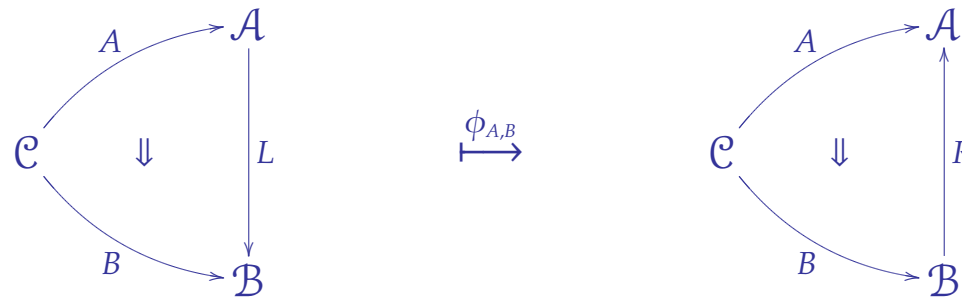
On reformule la condition de naturalité comme suit:



Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

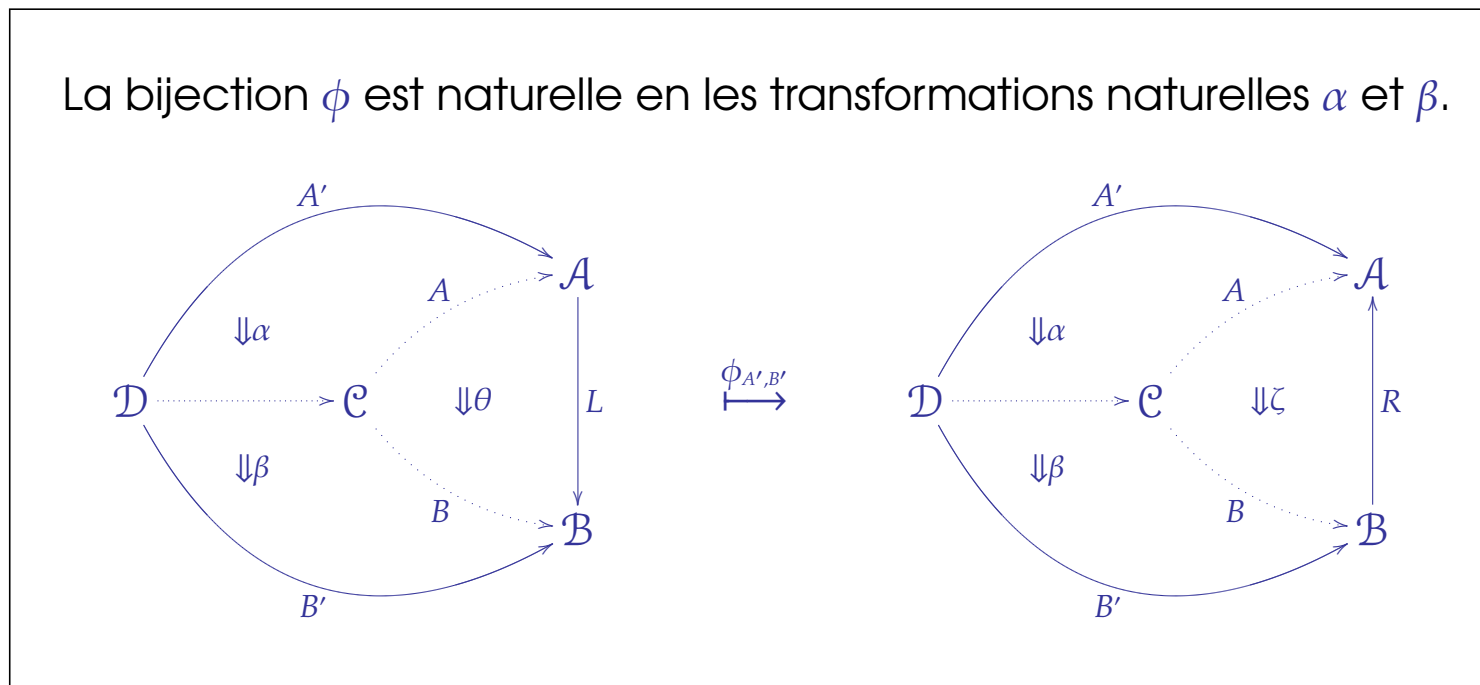
Ce point de vue 2-catégorique débouche sur une définition plus satisfaisante d'adjonction:

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles



Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:



Présentation algébrique de l'adjonction

Une **adjonction** est un quadruplet $(L, R, \eta, \varepsilon)$ où L et R sont des foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

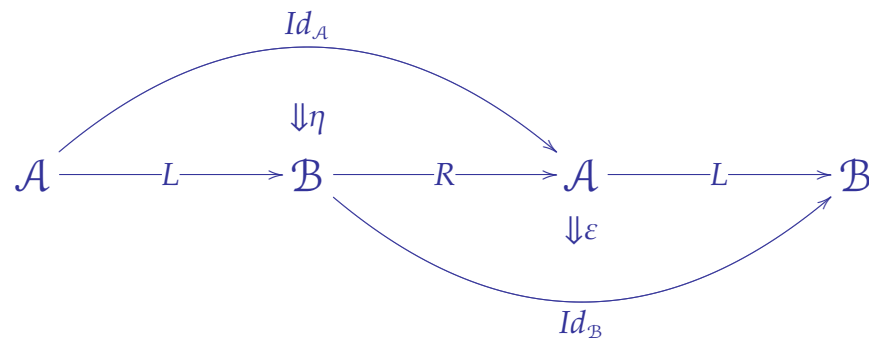
et η et ε des transformations naturelles:

$$\eta : Id_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cdot} RL \qquad \varepsilon : LR \xrightarrow{\cdot} Id_{\mathcal{B}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de L et R respectivement).

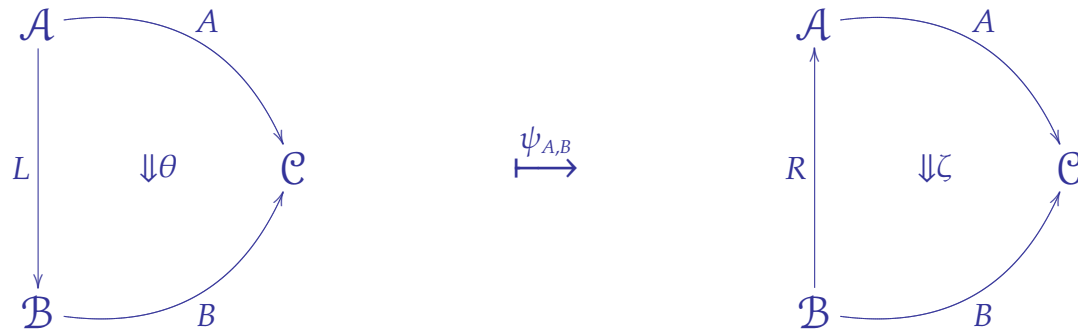
$$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R \qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$$

On dessine cette situation de la manière suivante:



Définition duale (mais équivalente) d'adjonction

Par dualité, la donnée d'une bijection ψ entre les ensembles de 2-cellules



bijection qu'on demande naturelle en A et B .

Exemple: adjonctions dans la 2-catégorie \mathcal{Rel}

On peut appliquer la notion d'adjonction dans toute 2-catégorie.

Ainsi, toute adjonction dans \mathcal{Rel} est de la forme

$$\begin{array}{ccc} & f_* & \\ A & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \perp \\ \curvearrowleft \end{array} & B \\ & f^* & \end{array}$$

où

$$A \xrightarrow{f} B$$

est une fonction ensembliste, et

$$\begin{aligned} f_* &= \{ (a, b) \mid a = f(b) \} \\ f^* &= \{ (b, a) \mid b = f(a) \} \end{aligned}$$

De plus,

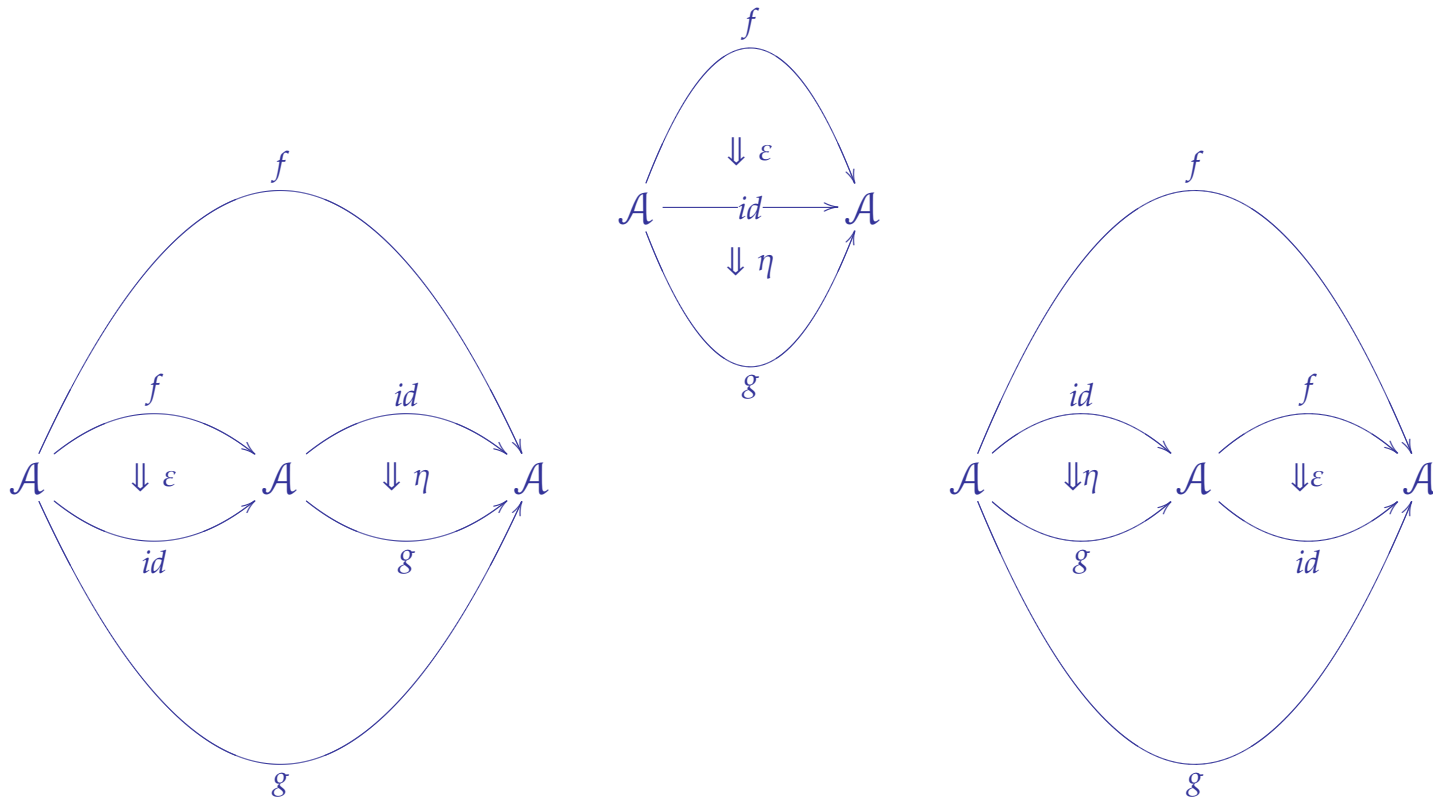
l'unité η est inversible ssi f est injective.
la counité ε est inversible ssi f est surjective.

Troisième partie

Diagrammes de cordes

Une notation topologique

Exemples



Trois manières de dessiner la même cellule 2-dimensionnelle